



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier*

Discipline ou spécialité : *Astrophysique*

Présentée et soutenue par *Thomas Gastine*

Le *18 novembre 2009*

Titre :

Étude de l'interaction convection-pulsations et application aux Céphéides

Jury

M ^{me}	Isabelle Baraffe	CRAL, ENS Lyon	Rapportrice
M.	Boris Dintrans	LATT, Toulouse	Directeur de thèse
M ^{me}	Marie-Jo Goupil	LESIA, Observatoire de Paris	Rapportrice
M.	Michel Rieutord	LATT, Toulouse	Président du jury
M.	Joël Sommeria	LEGI, Grenoble	Examineur
M.	Jean-Paul Zahn	LUTH, Observatoire de Paris	Examineur

École doctorale : *Sciences de l'Univers de l'Environnement et de l'Espace*

Unité de recherche : *Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes*

Directeur de Thèse : *Boris Dintrans*

Remerciements

Comme tous les hommes, il était beaucoup plus éloquent pour demander que pour remercier.

Prosper MÉRIMÉE

Après un peu plus de trois ans de thèse et deux mois passés à rédiger ce manuscrit, ce travail touche maintenant à sa fin. Sans le soutien, l'aide et l'amitié de nombreuses personnes, il n'aurait sans doute pas pu être mené à bien dans ces conditions. En maigre contrepartie de ce que vous m'avez apporté durant ces trois années, voici quelques remerciements...

Mes premières pensées vont naturellement vers toi Boris sans qui une majeure partie de ce travail n'aurait pas été possible. Au delà de ce qui pourrait sembler n'être qu'un lieu commun, j'aimerais utiliser ces quelques lignes pour te témoigner toute ma reconnaissance. Au cours de ces trois ans, tu as toujours été disponible pour m'encadrer et faciliter ma progression pas toujours évidente dans ce travail de thèse, i.e. « rendre le problème tractable » (e.g. [Dintrans & Brandenburg 2004](#)). Ton enthousiasme communicatif m'a souvent permis de me relancer dans les périodes de doute et ta rigueur scientifique a pesé dans la qualité de ce travail. Si j'ai pu acquérir quelques compétences en informatique, ce n'est pas pour rien et je t'en dois une bonne partie. Merci enfin de m'avoir fait totalement confiance en me laissant organiser mon travail comme je l'entendais. Ce fût un vrai plaisir de travailler avec toi !

Je suis également heureux de remercier tous les membres du jury. Merci à Isabelle Baraffe et Marie-Jo Goupil d'avoir accepté d'être les rapportrices de cette thèse. Leurs commentaires m'ont permis d'améliorer les points obscurs de ce manuscrit. Merci également à Joël Sommeria et à Jean-Paul Zahn d'avoir accepté d'être examinateurs. Enfin, je remercie Michel Rieutord qui m'a fait le plaisir de présider le jury.

Je souhaite remercier également le laboratoire pour m'avoir permis de réaliser cette thèse dans d'excellentes conditions. Un grand merci aux membres de l'équipe administrative du laboratoire, au service informatique et aux bibliothécaires qui ont toujours su me dénicher les articles les plus introuvables (e.g. [Baker 1987](#)). Cette thèse a été préparée dans l'équipe Dynamique des Fluides Astrophysiques, un grand merci donc à Michel, François L., François R. et Katia pour leur accueil. J'ai une pensée amicale pour François L. qui m'a gentiment « pistonné » pour donner des khôlles en classe prépa. Merci également à Pascal Petit de m'avoir donné, à moi pauvre thésard « qui fait pulser des étoiles dans son ordinateur », l'occasion d'aller observer au Pic du Midi par une froide semaine d'hiver (à Julien : comment ça il fait mauvais au Pic ? !). Merci aussi à Frédéric Paletou, *python guru*, pour m'avoir convaincu de me débarrasser d'IDL et d'aider moi aussi à répandre le virus.

Des remerciements aussi aux doctorants et post-doctorants du labo : Alex, Aurélie, Gaël, Guilhem (enfin un thésard qui trouve un boulot...), Jérôme, Rim, et tous les autres. Pas uniquement pour la « saine émulation intellectuelle » du bureau P11, j'ai une pensée spéciale pour toi Julien. Des révisions du master aux parties de Yams, des manifs aux discussions « moisissage », des installs de distros aux Monty Python, ces trois années sont définitivement un peu trop vite passées. Bon courage pour ta virée dans les pays froids et

pluvieux au delà du 50° parallèle mon vieux camarade ; en attendant je tiens la position ! Dans l'espoir assez improbable qu'on se retrouve un jour à travailler tous les deux dans le même labo.

Merci à Sylvain pour toutes les discussions passées et à venir (et vive le logiciel libre !). Merci aux « alcoolites » Jeannot et Alan, j'aurai vraiment aimé vous suivre en Équateur mais il faut bien soutenir un jour... Ces remerciements seraient incomplets si je ne mentionnais pas l'« escapade toulousaine » de l'ami Croch. Entre les virées au Passe-Temps , les soirées jeux-pizza et les sorties à l'Utopia, cette dernière année de thèse nous a permis de passer d'agréables moments ensemble. Je ne sais pas si j'ai vraiment eu l'occasion de te remercier avant que tu partes alors simplement merci pour cette année, et si je n'en dis pas plus c'est que tu sais bien que l'essentiel n'est pas écrit ici.

Mes pensées vont bien sûr vers toi Magali, mon amour, pour des raisons que par simple pudeur je n'évoquerai pas ici. Simplement donc, mille mercis à toi ma belle pour avoir été à mes côtés au jour le jour durant ces trois ans de thèse, dans les hauts comme dans les bas, à partager les pâtes et les pizzas de l'éternel étudiant que je suis, et ce même au travers de cet été sans vacances passé à rédiger.

Je conclus ces remerciements par mes parents. Leur confiance sans borne dans tous mes projets m'a été indispensable pour mener à bien ce travail. Sans ce soutien permanent, aurais-je été capable d'écrire ces 150 pages incompréhensibles ? !



Sommaire

Sommaire	5
Liste des notations utilisées	7
Introduction	9
1 Contexte astrophysique	13
2 Analyse de stabilité linéaire	41
3 Méthode numérique	55
4 DNS et saturation non-linéaire	67
5 Couplage convection-pulsations	85
Conclusions et perspectives	105
A Longueur de mélange dépendante du temps	111
B Calcul de la matrice adjointe	119
Liste des figures	129
Liste des tables	130
Liste des publications	131
Bibliographie	135
Index	141
Table des matières	143



Liste des notations utilisées

Notations

\vec{u}, u_z, u_x	Vitesse, composantes verticale et horizontale
\vec{k}, k_z, k_x	Vecteur d'onde, composantes verticale et horizontale
p	Pression
ρ, R	Densité
T, θ	Température
U, e	Énergie interne
S, s	Entropie
L	Luminosité
μ, ν	Viscosités dynamique et cinématique $\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$
λ, ω, τ	Valeur propre, pulsation et taux de croissance $\lambda = \tau + i\omega$
c_v, c_p	Capacités calorifiques à volume constant et à pression constante
κ	Opacité
K	Conductivité radiative $K \equiv \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}$
χ	Diffusivité radiative $\chi = \frac{K}{\rho c_p}$
γ	Exposant adiabatique (5/3 pour un gaz parfait monoatomique) $\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$
R^*	Constante des gaz parfaits
c_s	Vitesse du son $c_s \equiv \sqrt{\gamma R^* T}$
H_p	L'échelle de pression $H_p \equiv \left(\frac{d \ln P}{dz} \right)^{-1}$
g	Gravité
L_x, L_z	Dimensions horizontale et verticale du domaine
ℓ	Degré d'un mode propre d'oscillations ($\ell = 0$ pour un mode radial)
n	Ordre radial d'un mode propre d'oscillations

Opérateurs

$\vec{\nabla}, \nabla$	Opérateur gradient
$\text{div } \vec{x}$	Divergence
$\vec{\text{rot}} \vec{x}$	Rotationnel
Δ	Laplacien
$\overline{\overline{x}}$	Tenseur
$\vec{a} \otimes \vec{b}$	Produit tensoriel
\Re, \Im	Parties réelle et imaginaire
$\langle x \rangle$	Moyenne spatiale ou temporelle
\hat{x}	Transformée de Fourier de x

Acronymes

ADI	Alternating-Direction Implicit scheme, schéma numérique aux directions alternées
CFL	condition de Courant-Friedrichs-Levy
DNS	Direct Numerical Simulation, en français simulation numérique directe
FFT	Fast Fourier Transform, en français transformée de Fourier rapide
LMC	Large Magellanic Cloud, grand nuage de Magellan
LSB	Linear Solver Builder
MLT	Mixing Length Theory, en français théorie de la longueur de mélange
MPI	Message Passing Interface, bibliothèque de fonctions permettant d'exploiter les ordinateurs multiprocesseurs par passage de messages
MW	Milky Way, la Voie Lactée
SMC	Small Magellanic Cloud, petit nuage de Magellan
SOR	Successive Over-Relaxation, une méthode itérative de résolution des systèmes linéaires

Introduction

These results would certainly not warm the heart of an observer who had spent many a cold night at the telescope determining magnitudes of ± 0.01 mag and velocities ± 2 km/s!

Mihalas (2003)

LE contexte général de ce travail de thèse est l'étude des étoiles variables de type Céphéides, célèbres pour leur relation caractéristique période-luminosité servant d'indicateur de distance pour les galaxies. Les variations périodiques de la luminosité de ces étoiles sont dues à des oscillations acoustiques purement radiales excitées via un mécanisme lié aux propriétés d'absorption des photons par la matière, le κ -mécanisme, où κ désigne l'opacité du gaz. En effet, des sauts importants d'opacité apparaissent dans les zones d'ionisation de l'hydrogène et de l'hélium et conduisent à une modulation temporelle du flux radiatif. A l'image d'un moteur thermique, l'oscillation sera entretenue durant un cycle thermodynamique s'il y a gain de chaleur durant la phase de compression. C'est précisément le rôle joué par ces sauts d'opacité qui bloquent une partie du flux radiatif pendant les phases de compression pour la restituer durant les phases de détente, d'où un entretien continu des pulsations.

Ces étoiles sont localisées dans une région particulière du diagramme de Hertzsprung-Russell (Température effective - Luminosité), appelée *bande d'instabilité des Céphéides*. Les propriétés des Céphéides les plus « chaudes », situées près du bord bleu de cette bande d'instabilité, sont bien reproduites par des approches purement radiatives. En revanche, la modélisation des Céphéides « froides » proches du bord rouge demeure problématique car elles ont une zone convective en surface très étendue. Dans ce cas, un couplage fort s'installe entre la convection et les pulsations qui va moduler dans le temps le flux convectif de l'étoile. C'est ce couplage, actuellement mal maîtrisé par les théories de la convection dépendante du temps, qui empêche de reproduire correctement le bord rouge observé. Le but de cette thèse est d'étudier ce couplage convection-pulsations à partir de simulations numériques directes non-linéaires (DNS) à 2-D dans lesquelles une zone radiative partiellement ionisée et oscillant radialement par κ -mécanisme est couplée avec une zone convective.

La première partie de cette thèse a consisté en l'étude d'un problème *simplifié sans convection* correspondant à la propagation d'ondes acoustiques dans une zone radiative partiellement ionisée. Autrement dit, nous nous sommes focalisés sur la détermination des ingrédients physiques nécessaires à l'apparition du κ -mécanisme dans une couche de gaz parfait purement radiative à 2-D. Nous avons modélisé la zone d'ionisation par un profil de conductivité radiative dont nous pouvions aisément faire varier les paramètres fondamentaux, e.g. sa position radiale, son amplitude ou sa largeur. A partir de là, nous avons réalisé une étude paramétrique du κ -mécanisme via une analyse de stabilité linéaire. Cela nous a permis : (i) de déterminer les paramètres physiques de la couche les plus propices à l'apparition de modes amplifiés ; (ii) de déduire une *bande d'instabilité optimale* pour le problème *sans convection*.

Suite à ce premier travail, nous avons voulu réaliser les DNS correspondantes aux modèles d'équilibre dont les modes acoustiques étaient les plus déstabilisés par κ -mécanisme (i.e. ceux qui ont les taux de croissance les plus élevés). Néanmoins, ces modèles d'équilibre imposaient d'avoir toujours une densité très faible à la surface de la couche de gaz, entraînant des contraintes numériques rédhibitoires pour un code entièrement explicite comme le Pencil Code (trop forte diffusion radiative en surface qui limite le pas de temps explicite). En conséquence, nous avons développé un solveur *implicite* pour la partie radiative dans l'équation d'évolution de la température. Il repose sur un schéma aux directions alternées (ADI) qui traite la non-linéarité due à la conductivité radiative de manière semi-implicite. Il a alors été possible de réaliser les simulations non-linéaires correspondantes aux modèles d'équilibre les plus prometteurs. Un remarquable accord, tant sur le plan temporel (taux de croissance et fréquences) que spatial (structures verticales des modes), a été trouvé entre les deux approches (analyse de stabilité v.s. DNS non-linéaire).

Les modes acoustiques instables de ces premières DNS ont atteint le régime de saturation non-linéaire et nous avons ensuite cherché à comprendre les mécanismes physiques sous-jacents qui en sont responsables. Nous avons pour cela développé une méthode de projection originale utilisée normalement en aéro-acoustique. Cette méthode revient à projeter les champs physiques de la simulation non-linéaire sur une base orthonormée de vecteurs propres issus du problème *adjoint* pour les perturbations linéaires. Cela permet de suivre l'évolution temporelle de l'amplitude et du contenu énergétique de chaque mode présent dans la simulation. Nous avons alors montré que plus de 98% de l'énergie cinétique de la DNS était contenue dans le mode fondamental instable et le mode d'ordre radial $n = 2$. Ce résultat était *a priori* une surprise car ce second mode est *linéairement* stable. Nous avons, en fait, mis en évidence un couplage fort entre ces deux modes puisque le mode fondamental instable fournit de l'énergie au mode $n = 2$ stable via un mécanisme de résonance du type $2 : 1$ qui participe à la saturation non-linéaire. De plus, cette résonance a également permis de reproduire le phénomène de *progression d'Hertzsprung* observée dans les courbes de lumière d'étoiles Céphéides particulières appelées les « *bump*-Céphéides ».

A la suite de ces deux études dédiées au cas purement radiatif (analyse de stabilité linéaire et saturation non-linéaire), nous nous sommes focalisés sur le couplage convection-pulsations. En modifiant la structure d'équilibre (profondeur du trou de conductivité radiative, valeur imposée du flux radiatif, etc.), il est possible de faire apparaître une zone convectivement instable dans notre boîte. La convection démarre et un couplage fort s'installe entre les pulsations acoustiques générées par κ -mécanisme et les mouvements convectifs. Le temps de retournement de la convection étant très proche de la période du mode fondamental, la propagation de ce dernier est fortement perturbée. La méthode de projection, développée précédemment pour les modèles purement radiatifs, permet là encore de déterminer précisément la quantité d'énergie cinétique contenue dans les modes.

Selon les modèles d'équilibre utilisés, l'influence de la convection est en fait très variable. Dans une première série de simulations, la convection ne déforme pas suffisamment les profils verticaux de température et de densité pour perturber durablement la propagation du mode. L'énergie cinétique totale de ces simulations reste alors principalement contenue dans les modes acoustiques. En revanche, dans d'autres modèles, la déformation des profils moyens engendrée par la convection est suffisante pour stabiliser le mode. Dans ce cas, la convection « tue » les modes acoustiques et le ratio d'énergie tend vers 0. Cette situation correspond exactement à ce qui est observé près du bord rouge de la bande d'instabilité des Céphéides puisque des modes supposés être *linéairement* instables (i.e. ils sont dans la bande d'instabilité théorique) sont finalement stabilisés via leur interaction avec la convection (i.e. la bande d'instabilité réelle est moins large). Enfin, la réalisation de simulations numériques non-linéaires avec convection nous a permis d'examiner la validité de certains modèles de longueur de mélange dépendante du temps.

L'organisation du manuscrit suit les grandes étapes chronologiques présentées précé-

demment. Le premier chapitre aborde le contexte astrophysique de ce travail en détaillant premièrement les propriétés générales des Céphéides, puis en donnant une description du κ -mécanisme responsable de leurs oscillations dans la bande d'instabilité, avant de finir par un résumé des principaux modèles de longueur de mélange dépendante du temps. La deuxième partie présente les résultats obtenus lors de l'étude *linéaire* de la propagation d'ondes acoustiques dans une couche de gaz entièrement radiative. Le chapitre 3 est dédié au solveur implicite développé pour résoudre le terme de diffusion radiative dans les simulations numériques *non-linéaires*. Le chapitre 4 présente alors les résultats de ces simulations avec notamment l'étude de la saturation non-linéaire et le phénomène de progression d'Hertzsprung que nous avons pu reproduire numériquement. Enfin, le dernier chapitre présente les modèles avec convection, ainsi que leur comparaison avec les modèles de longueur de mélange dépendante du temps.



Sommaire

1.1	Les étoiles Céphéides	14
1.1.1	Structure	14
1.1.2	Relation Période-Luminosité	15
1.1.3	Bande d'instabilité	16
1.2	Le κ -mécanisme	18
1.2.1	Thermodynamique des oscillations	18
1.2.2	Région de transition	23
1.3	Bande d'instabilité des Céphéides	24
1.3.1	Au delà du bord bleu	24
1.3.2	Dans la bande d'instabilité	24
1.3.3	Le bord rouge...	25
1.3.4	...et ses difficultés de modélisation	25
1.3.5	Vers une solution ?	26
1.4	Théories de la longueur de mélange dépendante du temps	26
1.4.1	Construction du système d'équations	27
1.4.2	Modélisation du tenseur de Reynolds	28
1.4.3	Équations finales	29
1.4.4	Approximation de diffusion et viscosité turbulente	29
1.4.5	Estimation des paramètres α	34
1.4.6	Conclusion et résultats	36
1.4.7	Améliorations possibles	38
1.5	Conclusion : vers des simulations numériques directes	38

La problématique du couplage convection-pulsations affecte principalement les étoiles de type RR-Lyræ et Céphéides. Les bandes d'instabilité de ces étoiles sont reproduites par des modèles de longueur de mélange dépendante du temps dont la validité repose sur deux hypothèses majeures :

1. des constantes nombreuses dont la valeur n'est pas connue *a priori*,
2. des approximations et des modélisations dont la validité n'a été testée par aucune expérience.

Le modèle de convection choisi affectera encore plus les Céphéides, étoiles géantes dont la densité en surface est très faible, puisque les zones convectives de ces étoiles sont fortement super-adiabatiques (e.g. [Mihalas 2003](#)). C'est donc pour cette raison que nous évoquerons principalement par la suite ces étoiles, tout en gardant en mémoire que la problématique du couplage convection-pulsations reste importante pour d'autres types d'étoiles pulsantes.

1.1 Les étoiles Céphéides

1.1.1 Structure

Les Céphéides sont des étoiles évoluées de type géantes rouges dont le type spectral est compris entre F et K . Il s'agit d'étoiles dont la masse est comprise entre 2 et 11 M_{\odot} et la luminosité entre 200 et 36000 L_{\odot} (table 1.1).

Les Céphéides ont pour propriété principale d'être des étoiles variables. Du fait de leur forte luminosité et de leur variabilité importante, elles ont constitué une des premières catégories d'étoiles pulsantes connues (la variabilité de δ -Cephei est connue depuis 1784). La période caractéristique de variation de la luminosité s'étale de 2 jours, pour les étoiles à plus courtes périodes, jusqu'à plus de 50 jours pour les longues périodes. Les variations de luminosité sont comprises entre 0.01 et 1.3 magnitudes ce qui, en terme de vitesse de déplacement de la surface, se traduit par des valeurs comprises entre 1 et 60 km/s. Le rayon subit des variations pouvant aller jusqu'à 30%.

Masse	$2 M_{\odot} < M < 11 M_{\odot}$
Rayon	$2 R_{\odot} < R < 270 R_{\odot}$
Luminosité	$200 L_{\odot} < L < 36000 L_{\odot}$
Magnitude	$-2.4 < M_V < -6.5$
Période	$2 \text{ jours} < \Pi < 60 \text{ jours}$
Variabilité	$0.01 < \delta\text{mag} < 1.3$

TAB. 1.1: Résumé des principales propriétés des Céphéides.

Les Céphéides se répartissent entre différentes catégories bien précises que l'on distingue par le mode de pulsations de l'étoile. Pour la très grande majorité de ces étoiles, les oscillations sont purement radiales, autrement dit la symétrie sphérique est conservée lors d'un cycle d'oscillations. Cependant, différents modes radiaux peuvent être excités selon l'étoile considérée. Dans une première catégorie, on trouve les Céphéides *simple mode* oscillant sur le mode fondamental (F), le mode d'ordre 1 ($n = 1$) (O1) ou le mode $n = 2$ (O2) (ces dernières étant bien moins nombreuses que les deux autres catégories). De manière schématique, si l'on note P_0 la période du mode fondamental dans une Céphéide, alors $P_1 \sim 0.75P_0$ pour le mode d'ordre 1 et $P_2 \sim 0.5P_0$ pour le mode d'ordre 2. En complément de ces étoiles, on trouve des Céphéides *double-modes* dans lesquelles deux modes sont excités. Parmi celles-ci, il y a les *beat*-Céphéides oscillant sur les modes F et O1 et des Céphéides oscillant sur les modes O1 et O2. A cela s'ajoutent les Céphéides oscillant sur deux modes, F instable et O2 linéairement stable, où il y a une résonance 2 : 1 du fait du rapport de période $P_2/P_0 \sim 0.5$. Cette catégorie F/O2 forme l'ensemble des *bump*-Céphéides et fera l'objet d'un développement particulier dans le chapitre 4. Notons également que quelques Céphéides triple-modes F/O1/O2 ont été observées très récemment (cf Soszynski *et al.* 2008).

Les grands relevés photométriques récents, comme par exemple EROS¹ ou OGLE², ont permis de construire des catalogues importants de Céphéides pour les galaxies les plus proches. La table 1.2 résume ainsi les Céphéides connues dans différentes galaxies (Voie Lactée, les nuages de Magellan, etc.) et les répartit en différentes catégories suivant leur mode de pulsations.

Ainsi, plus de 3000 Céphéides sont connues dans le LMC et plus de 2000 dans le SMC. La part des Céphéides de la Voie Lactée est relativement faible puisqu'elles représentent moins de 10% des Céphéides connues. Parmi les différents types de Céphéides présentés

¹Expérience pour la Recherche d'Objets Sombres <http://eros.in2p3.fr>

²The Optical Lensing Gravitational Experiment <http://ogle.astrouw.edu.pl/>

Galaxies	F	O1	O2	F/O1	O1/O2	F/O2
MW	> 500					
LMC	1848	1228	14	61	203	
SMC	2048		15	24		71
M31	> 800					
M33	2327					

TAB. 1.2: Nombre de Céphéides connues dans la Voie Lactée (MW), le grand Nuage de Magellan (LMC) (Soszynski *et al.* 2008), le petit Nuage de Magellan (SMC) (Udalski *et al.* 1999), la galaxie d'Andromède (M31) et la galaxie du Triangle (M33) (Hartman *et al.* 2006) réparties suivant leur mode de pulsations : mode fondamental (F), mode $n = 1$ (O1) et $n = 2$ (O2), et Céphéides double-modes.

précédemment, notons que les étoiles F et O1 dominent très largement les populations observées. A cela s'ajoutent un certain nombre de Céphéides double-mode relativement nombreuses sur les relevés les plus récents comme OGLE III sur le LMC par exemple.

1.1.2 Relation Période-Luminosité

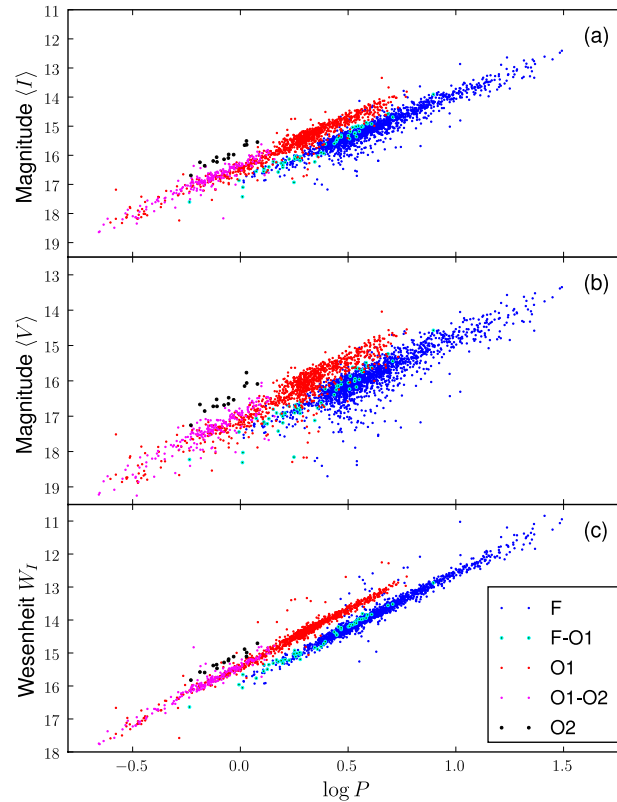


FIG. 1.1: Relation période-luminosité construite à partir des données OGLE en bande I (a), V (b) et pour la magnitude Wesenheit W_I (c). Les points bleus sont les Céphéides oscillant sur le mode fondamental (F), les rouges sur le mode $n = 1$ (O1) et les noirs sur le mode $n = 2$ (O2). Les Céphéides double-modes sont représentées par des points cyan (F/O1) et magenta (O1/O2).

Durant les années 1910-1920, Henrietta Leavitt découvre une relation entre la luminosité des Céphéides et leur période : la relation période-luminosité (Leavitt & Pickering 1912). Depuis lors, ces étoiles ont joué un rôle majeur dans l'estimation des distances extragalactiques. L'étalonnage précis de cette relation sur les nuages de Magellan dans différentes bandes spectrales a permis d'estimer les distances d'une vingtaine de galaxies proches. En dépit des différentes incertitudes liées par exemple à la méconnaissance des effets de la métallicité sur cette relation période-luminosité, cet estimateur de distance est un des plus utilisés pour contraindre notamment la valeur de la constante de Hubble H_0 (e.g. Allen & Shanks 2004). A ce titre, le télescope spatial Hubble a permis d'obtenir un échantillon important de Céphéides appartenant à plus de 25 galaxies.

Les données récoltées par le survey de OGLE III permettent de construire des relations période-luminosité dans différentes bandes spectrales pour le grand nuage de Magellan (Soszynski *et al.* 2008, cf Tab. 1.3). Pour les bandes spectrales I et V , chacune de ces étoiles a été placée dans un plan période-magnitude (Fig. 1.1). Les Céphéides ont également été triées par type de pulsations : les F en bleu, les O1 en rouge et les O2 en noir. Les Céphéides double-mode (F/O1 et O1/O2) ont été également représentées sur le diagramme par des points couleur cyan et magenta.

Les Céphéides F et O1 se répartissent relativement bien sur deux droites dans les diagrammes période-magnitude. Les Céphéides double-modes F/O1 et O1/O2 viennent se positionner à la limite entre les différentes populations de Céphéides simple mode. Néanmoins, utiliser uniquement les magnitudes dans des bandes spectrales bien définies a un inconvénient majeur : les effets de l'extinction dûs à la poussière entraînent une plus grande dispersion dans le diagramme. Une solution à ce problème est d'utiliser la magnitude Wesenheit W_I , définie par

$$W_I = I - 1.55(V - I). \quad (1.1)$$

Cette magnitude a pour propriété de permettre de s'affranchir des effets d'extinction dûs à la poussière (e.g. Madore 1982). Si l'on représente W_I en fonction de $\log P$ (Fig. 1.1c), on obtient effectivement une dispersion moins grande et les différentes populations de Céphéides sont mieux séparées.

La figure 1.1 montre donc que la relation période-luminosité est dépendante du type de Céphéide considéré, e.g. F ou O1. Ce type de résultat illustre toute la difficulté pour construire une relation période-luminosité « universelle » qui soit suffisamment précise pour estimer les distances des galaxies.

1.1.3 Bande d'instabilité

Les Céphéides se regroupent dans une région particulière du diagramme de Hertzsprung-Russel (HR) appelée *bande d'instabilité des Céphéides*. Cette bande, quasiment verticale, regroupe l'ensemble des Céphéides présentées sur la figure 1.1. Un exemple de diagramme HR construit à partir des données OGLE II pour le petit nuage de Magellan (SMC) est présenté dans la figure 1.2a. En rouge sont indiquées les Céphéides oscillant sur le mode fondamental et en bleu celles oscillant sur le mode d'ordre 1. Les autres étoiles du champ sont représentées par des points noirs et se localisent en partie sur la séquence principale et sur la branche asymptotique des géantes. On constate bien le regroupement des Céphéides dans une zone quasi-verticale et relativement étroite. Notons la séparation assez nette entre les deux populations de Céphéides.

Les Céphéides sont des étoiles évoluées dont le temps caractéristique d'évolution $\tau_{\text{ev}} \sim 10^6$ ans est très court en comparaison à celui du Soleil $\tau_{\text{ev}\odot} \sim 10^{10}$ ans. Lors de leur trajet évolutif, ces étoiles traversent généralement par trois fois la bande d'instabilité des Céphéides en décrivant ce que l'on appelle des *blue-loops*. Des exemples de trajets évolutifs pour des modèles d'étoiles de $2.2 M_\odot$ à $10 M_\odot$ ont été superposés aux données OGLE du

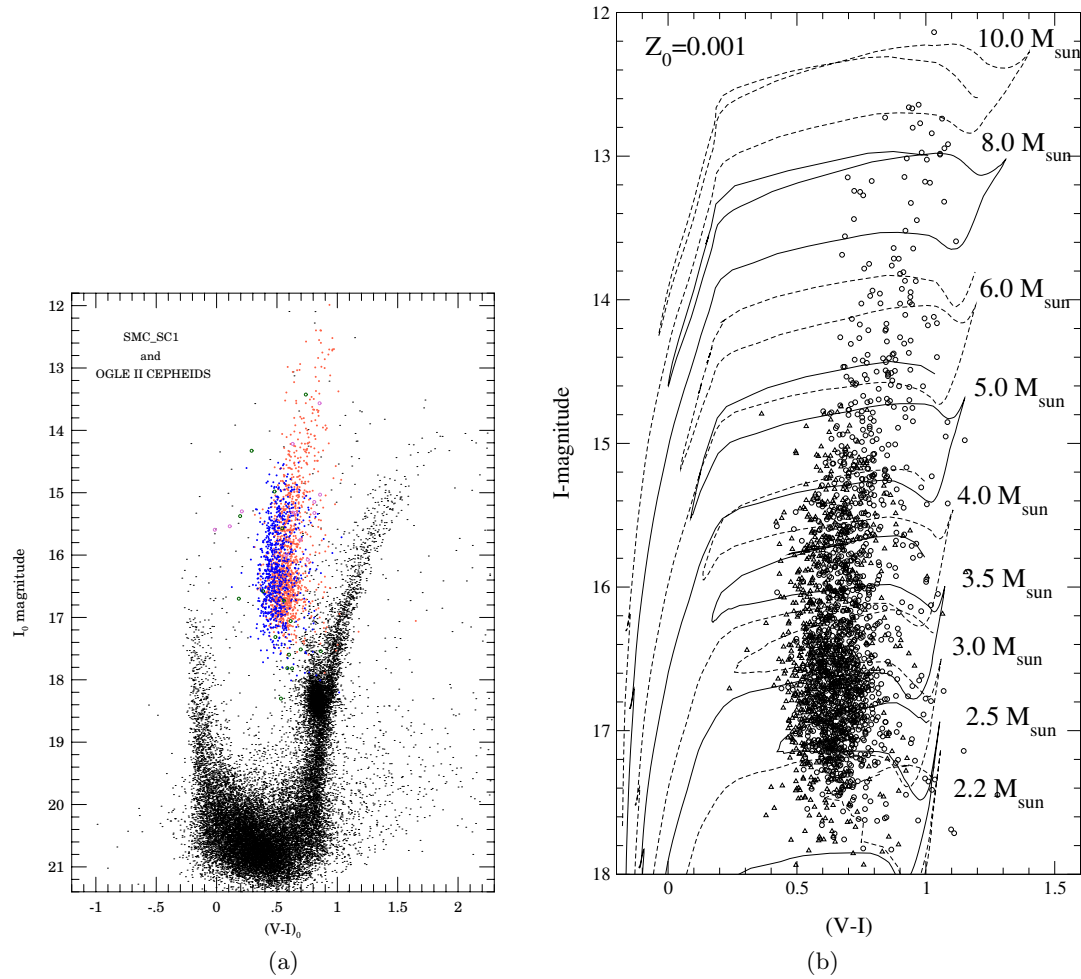


FIG. 1.2: Diagrammes couleur-magnitude pour une partie du champ OGLE pour le SMC. **a)** Les points rouges correspondent à des Céphéides oscillant sur le mode fondamental (F) et les bleus à des Céphéides oscillant sur le mode d'ordre 1 (O1) (tiré de [Udalski et al. 1999](#)). Les autres points noirs sont les étoiles du champ n'étant pas des Céphéides. **b)** Trajets évolutifs pour des étoiles de $2.2 M_{\odot}$ à $10 M_{\odot}$. Tous les tracés traversent la bande d'instabilité du SMC observée par OGLE (les Céphéides F sont ici des cercles les O1 sont des triangles) (tiré de [Cordier et al. 2003](#)).

SMC sur la figure 1.2b. On peut constater sur cette figure que pour toutes les masses considérées, l'étoile croise bien trois fois la bande d'instabilité (Cordier *et al.* 2003).

A l'heure actuelle, aucune Céphéide coupant la bande d'instabilité pour la première fois n'a été observée, i.e. les Céphéides en sont toutes à leur deuxième ou troisième passage. Ce résultat peut provenir d'un biais observationnel puisque le temps d'évolution sur la première branche (combustion de l'hydrogène dans les couches externes) est beaucoup plus court que sur les branches horizontales suivantes (combustion de l'hélium au centre et de l'hydrogène en couches), on a en effet $t_1 \simeq t_2/10$ (e.g. Buchler 1997). Il y a ainsi une probabilité beaucoup plus faible d'observer des étoiles dans leur premier passage plutôt que des étoiles ayant commencé la combustion de l'Helium.

1.2 Le κ -mécanisme

En parallèle de l'intérêt des Céphéides pour les mesures de distances galactiques, des études ont été menées pour étudier les mécanismes hydrodynamiques responsables des oscillations observées. Entre 1917 et 1926, Eddington a ainsi posé les bases de la théorie des oscillations stellaires adiabatiques et purement radiales. Il a montré que les oscillations étaient amorties dans la plupart des étoiles, ce qui l'a amené à envisager pour la première fois l'existence d'un phénomène physique continu à l'origine de l'entretien des oscillations.

Son idée principale est de considérer une étoile pulsante (une Céphéide par exemple) comme un véritable *moteur thermique* dans lequel de l'énergie serait stockée durant les phases de compression et évacuée lors des phases de détente. Il a alors l'idée d'un mécanisme de *valve* servant à satisfaire les conditions physiques nécessaires à l'entretien des oscillations (Eddington 1917). Sa première idée est de situer cette valve dans le cœur des étoiles, et de relier l'entretien des oscillations au taux de production nucléaire ϵ .

Les calculs menés par la suite par Cox & Whitney (1958) et Epstein (1950) dans les années 1950 ont montré que ce mécanisme ne pouvait être à l'origine de l'entretien des oscillations car il y a un amortissement beaucoup trop fort dans les couches extérieures de l'étoile qui compense très largement l'excitation fournie au centre.

Ces premiers résultats ont suggéré de rechercher un mécanisme d'excitation qui serait plutôt localisé dans les couches externes des étoiles (où les effets non-adiabatiques deviennent importants). En 1926, Eddington avait déjà présenté un autre mécanisme de valve possible. Il avait en effet suggéré que l'on pouvait obtenir le même effet de moteur thermique non pas en faisant varier la quantité de chaleur reçue, mais en faisant varier la manière dont cette chaleur est évacuée, de telle sorte que lors d'une phase de compression la chaleur serait bloquée puis évacuée lors de la phase de détente suivante. Ceci serait rendu possible par une variation adéquate de l'opacité. Cette description est à l'origine de notre compréhension actuelle du κ -mécanisme (où κ désigne le coefficient d'opacité).

Cette idée de départ a conduit aux développements successifs de la compréhension du mécanisme d'excitation des Céphéides. Zhevakin (1963) et Cox & Whitney (1958) ont indépendamment été les premiers à associer cette zone d'excitation aux zones d'ionisation, et en particulier comme nous le verrons par la suite, à la seconde ionisation de l'hélium. La figure 1.3 illustre la position respective des différents types d'étoiles pulsantes dans un diagramme HR. La bande d'instabilité des Céphéides est ici représentée par une zone hachurée en rouge. Dans une bande quasiment-verticale contenant les Céphéides, les δ -Scuti, les RR-Lyræ et les DAV, toutes les étoiles subissent des oscillations entretenues par le κ -mécanisme.

1.2.1 Thermodynamique des oscillations

Dans la plupart des Céphéides, (Tab. 1.2 et Fig. 1.1), les modes excités par κ -mécanisme sont des modes *acoustiques* purement radiaux et d'ordre faible. La problématique des

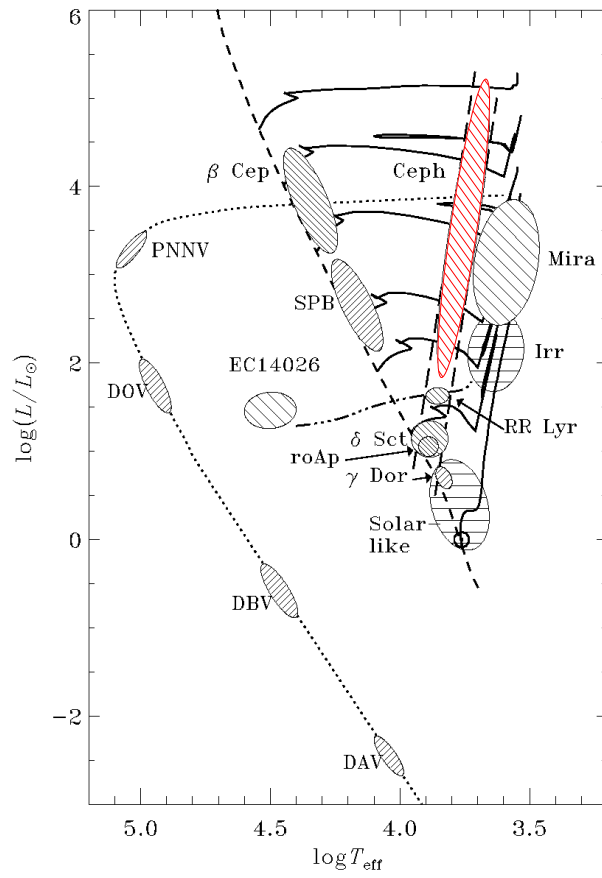


FIG. 1.3: Diagramme HR des différents types d'étoiles pulsantes. La bande d'instabilité des Céphéides est mise en valeur par une zone hachurée en rouge.

pulsations des Céphéides peut donc dans un premier temps être ramenée à un problème mono-dimensionnel se focalisant sur les modes de pression.

1.2.1.1 Un moteur thermique

Pour déterminer la stabilité d'un mode acoustique, il est intéressant d'estimer le signe de son taux de croissance τ par l'intermédiaire du formalisme de l'intégrale de travail. L'hypothèse fondamentale de la démonstration qui va suivre est la quasi-adiabaticité des différents mécanismes physiques mis en jeu au cours des oscillations. Cela revient à supposer qu'à l'issue d'une période d'oscillations, l'étoile revient quasiment à son état thermodynamique de départ.

Soit une couche de masse dm à un rayon r donné et considérons un cycle d'oscillations de cette couche. D'après le premier principe de la thermodynamique, nous pouvons écrire une relation entre le travail dW exercé par la couche sur ses voisins, l'énergie interne dU gagnée par la couche et la quantité de chaleur dq échangée

$$dq = dU + dW. \quad (1.2)$$

Intégrons maintenant sur un cycle complet d'oscillations

$$\oint dq = \oint dU + \oint dW, \quad (1.3)$$

où \oint désigne ici une intégration temporelle sur un cycle. Si maintenant nous supposons qu'au bout d'un cycle complet d'oscillations, la couche retourne quasiment à son état initial (approximation quasi-adiabatique), alors nous obtenons un cycle de Carnot dans lequel toutes les transformations sont réversibles. U étant une fonction d'état, on a $\oint dU = 0$, d'où

$$W = \oint dq. \quad (1.4)$$

En appliquant le second principe de la thermodynamique, nous pouvons déterminer la variation d'entropie dS par

$$dS = \frac{dq}{T}. \quad (1.5)$$

Notons T_0 la température initiale et, après un certain temps, $T = T_0 + \delta T$ la nouvelle température de la couche. Au premier ordre, on a donc

$$dS = \frac{dq}{T_0} - \frac{\delta T}{T_0^2} dq. \quad (1.6)$$

Sur un cycle complet, comme S est une fonction d'état, on a $\oint dS = 0$. D'où

$$\oint dq = \oint \frac{\delta T}{T_0} dq. \quad (1.7)$$

Combiné aux équations (1.4) et (1.7), le travail sur un cycle est donc

$$W = \oint \frac{\delta T}{T_0} dq. \quad (1.8)$$

Enfin en intégrant sur toute la masse de l'étoile, on obtient le travail total

$$\boxed{W_{\text{tot}} = \int_M \oint \frac{\delta T}{T_0} dq dm.} \quad (1.9)$$

1.2.1.2 Détermination d'un critère basé sur l'intégrale de travail

Dans la suite de la démonstration, nous nous focaliserons sur les petites perturbations autour d'un état d'équilibre des quantités physiques. Par exemple, la perturbation *eulérienne* d'une quantité X s'écrit

$$X(\vec{r}, t) = X_0(\vec{r}) + X'(\vec{r}, t). \quad (1.10)$$

Rappelons également, que la fluctuation *lagrangienne* s'écrit alors

$$\delta X(\vec{r}) = X'(\vec{r}) + \vec{\delta r} \cdot \vec{\nabla} X_0. \quad (1.11)$$

Sauf mention contraire, dans la suite du document, les quantités primées (X') se rapporteront à des perturbations eulériennes et les quantités avec un δ (δX) à des fluctuations lagrangiennes.

Dans l'appendice A de [Gastine & Dintrans \(2008a\)](#), nous avons montré que l'expression obtenue dans l'équation (1.9) peut être développée de la manière suivante

$$\tau = - \frac{\Re \left[\int_V (\gamma - 1) \frac{\delta \rho^*}{\rho} \operatorname{div} \vec{F}' dV \right]}{\int_V |\vec{u}|^2 \rho_0 dV}, \quad (1.12)$$

où le symbole \Re représente la partie réelle et τ désigne le taux de croissance du mode. En utilisant la luminosité L plutôt que le flux F , nous pouvons écrire de manière équivalente

$$\tau = - \frac{\Re \left[\int_V (\gamma - 1) \frac{\delta \rho^*}{\rho} L \frac{d}{dm} \left(\frac{\delta L}{L} \right) dm \right]}{\int_V |\vec{u}|^2 dm} = \frac{C_r}{\int_V |\vec{u}|^2 dm} \quad (1.13)$$

La question de la stabilité dépend du signe du numérateur (noté C_r par la suite) de cette équation. Si $C_r > 0$, le taux de croissance du mode est positif celui-ci est *instable* ; s'il est négatif le mode est *stable*. L'expression (1.12) est la plus générale possible et nous allons faire quelques hypothèses afin d'en simplifier son étude. Dans la suite de la démonstration, nous ne considérerons que les modes radiaux. De même, toute contribution du flux convectif au terme $\operatorname{div} \vec{F}'$ sera négligée.

Supposons donc une phase de compression de la couche. La densité augmente, i.e. $\delta \rho / \rho > 0$, donc le signe du taux de croissance ne va alors dépendre que du changement de luminosité δL : si δL augmente vers la surface, on aura $C_r < 0$ et le mode sera amorti ; si au contraire, δL diminue vers l'extérieur, alors la zone contribuera à l'excitation. Cette idée est cohérente avec la notion de moteur thermique avancée par Eddington. Lors des phases de compression ($\delta \rho / \rho > 0$), si δL augmente vers l'extérieur, cela signifie que plus d'énergie quitte la zone vers le haut qu'il n'en arrive par le bas : il y a donc une perte nette d'énergie de la couche lors des phases de compression et le mode est amorti. L'inverse peut également se produire et dans ce cas une fraction d'énergie est accumulée durant les phases de compression et conduit à l'instabilité du mode.

Considérons maintenant la perturbation δL plus en détails. Dans l'approximation de diffusion on a

$$L = -4\pi r^2 K \frac{dT}{dr}. \quad (1.14)$$

Nous pouvons en déduire les perturbations lagrangiennes de la luminosité

$$\frac{\delta L}{L} = 2 \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta K}{K} + \left(\frac{dT}{dr} \right)^{-1} \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta T}{T} \right) \quad (1.15)$$

Pour les modes d'ordre radial faible impliqués dans les pulsations des Céphéïdes (F et O1 principalement), nous pouvons négliger les termes dérivés ainsi que le terme de déplacement lagrangien devant les autres termes (e.g. [Christensen-Dalsgaard 2003](#)). La perturbation de la conductivité radiative s'écrit quant à elle

$$\frac{\delta K}{K} = \mathcal{K}_T \frac{\delta T}{T} + \mathcal{K}_\rho \frac{\delta \rho}{\rho}, \quad (1.16)$$

avec

$$\mathcal{K}_T \equiv \left(\frac{\partial \ln K}{\partial \ln T} \right)_\rho \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_\rho \equiv \left(\frac{\partial \ln K}{\partial \ln \rho} \right)_T. \quad (1.17)$$

En utilisant l'approximation quasi-adiabatique utilisée précédemment, les perturbations δT et $\delta \rho$ sont reliées par

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \simeq \frac{1}{\Gamma_3 - 1} \frac{\delta T}{T}. \quad (1.18)$$

La perturbation de luminosité devient donc

$$\frac{\delta L}{L} \simeq \frac{\mathcal{K}_\rho}{\Gamma_3 - 1} + \mathcal{K}_T. \quad (1.19)$$

Avec Eq. (1.13), la condition pour obtenir un mode instable, i.e. $\tau \geq 0$, devient donc

$$\boxed{\frac{d}{dr} \left(\frac{\mathcal{K}_\rho}{\Gamma_3 - 1} + \mathcal{K}_T \right) < 0.} \quad (1.20)$$

Ce résultat correspond à la condition donnée par [Unno *et al.* \(1989\)](#) en raisonnant sur les opacités.

Dans les zones d'ionisation des éléments abondants, des modifications importantes de l'équation d'état, de l'opacité et des coefficients thermodynamiques ont lieu. Dans ces régions, l'opacité augmente avec la température (\mathcal{K}_T diminue fortement). Le flux radiatif est bloqué et la couche va absorber de l'énergie pendant les phases de compression. Ce surplus d'énergie est ensuite évacué sous forme d'énergie mécanique (et donc d'oscillations) lors des phases de détente. Les conditions d'instabilité sont alors réunies : le κ -mécanisme est alors efficace.

De plus, dans ces régions, l'exposant adiabatique Γ_3 devient nettement plus petit que 5/3 car l'énergie reçue lors d'une compression va principalement augmenter la fraction de particules ionisées dans le milieu, au détriment de l'agitation thermique. Cette variation spatiale de Γ_3 vient renforcer les effets dûs à l'opacité et ce phénomène est appelé le γ -mécanisme (e.g. [Unno *et al.* 1989](#)).

Dans l'expression (1.20), le terme prépondérant est \mathcal{K}_T puisque c'est lui qui subit les variations les plus importantes au passage de la zone d'ionisation. C'est donc principalement ce terme qui va contrôler la dynamique des oscillations. Par la suite, nous négligerons les dépendances en densité de la conductivité radiative \mathcal{K}_ρ pour obtenir un critère simplifié pour l'instabilité :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{K}_T}{dr} < 0.} \quad (1.21)$$

1.2.1.3 Limitations

Les résultats dérivés précédemment à partir de l'étude de l'intégrale de travail souffrent de deux limitations principales :

- Les zones d’ionisation sont très fines en comparaison des échelles de longueur d’une enveloppe stellaire. En dehors de ces zones, les lois d’opacité (de type Kramers, e.g. [Carson 1976](#)), vont induire un amortissement très fort qui risque de compenser l’excitation produite par les sauts d’opacité (e.g. [Seaton & Badnell 2004](#)). La condition exprimée dans l’équation (1.21) est donc *nécessaire* à l’obtention de modes instables mais pas suffisante.
- Les résultats obtenus précédemment reposent essentiellement sur l’approximation quasi-adiabatique, qui n’est plus vérifiée dans les couches les plus externes des enveloppes stellaires. Avec la diminution de la densité en surface, les effets non-adiabatiques deviennent en effet très importants.

1.2.2 Région de transition

Afin d’examiner les conséquences des points que nous venons de soulever, il est nécessaire d’étudier la transition entre une zone adiabatique et une zone non-adiabatique. Pour cela, écrivons l’équation d’évolution pour les perturbations $\delta\rho$, δT et δL ([Cox 1980](#); [Christensen-Dalsgaard 2003](#)) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{T} \right) - (\Gamma_3 - 1) \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right) \simeq - \frac{L}{4\pi \rho r^2 c_v T} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{L} \right). \quad (1.22)$$

Cette équation peut encore être réécrite sous la forme

$$\Delta \left(\frac{\delta L}{L} \right) \sim \Psi \left[\frac{\delta T}{T} - (\Gamma_3 - 1) \frac{\delta \rho}{\rho} \right], \quad (1.23)$$

avec

$$\boxed{\Psi = \frac{\langle c_v T \rangle \Delta m}{\Pi L}}. \quad (1.24)$$

$\Delta \left(\frac{\delta L}{L} \right)$ est le changement de $\frac{\delta L}{L}$ entre la surface et le point considéré, Δm est la masse au-dessus du point considéré et $\langle c_v T \rangle$ représente une moyenne sur cette région. Π est la période d’oscillation du mode fondamental et peut être approximée par le temps mis par une onde acoustique pour faire un aller-retour dans la couche (soit $\Pi = 2d/c_s$ où c_s est la vitesse du son).

Ψ représente le rapport entre l’énergie thermique accumulée entre la zone considérée et la surface et l’énergie transportée par radiation durant une période d’oscillations. Comme nous avons utilisé l’approximation quasi-adiabatique comme outil de diagnostic, il est intéressant de vérifier sa validité par l’intermédiaire du coefficient Ψ , qui représente en fait le rapport entre l’échelle de temps dynamique et l’échelle de temps thermique associée à une région particulière de l’étoile.

A la surface Si l’on se place très proche de la surface de l’étoile, la masse intégrée Δm est très faible et donc $\Psi \ll 1$. Le contenu en énergie est trop faible pour affecter la luminosité. La fluctuation de luminosité est dite *gelée*, i.e. la luminosité est quasi-constante. C’est le cas non-adiabatique fort.

En profondeur A l’inverse si nous nous plaçons à grande profondeur, l’échelle de temps thermique devient très grande par rapport à l’échelle de temps dynamique et $\Psi \gg 1$. L’hypothèse adiabatique est alors parfaitement remplie.

Entre ces deux extrêmes, il existe une zone, appelée *région de transition*, dans laquelle

$$\boxed{\Psi \sim 1.} \quad (1.25)$$

La question de la stabilité de l'étoile va en réalité dépendre de la position *relative* de la zone d'ionisation et de cette région de transition.

1.3 Bande d'instabilité des Céphéides

1.3.1 Au delà du bord bleu

Considérons le cas où la zone d'ionisation est proche de la surface, c'est-à-dire une étoile dont la température de surface est élevée (donc bleue). Elle est située nettement au-dessus de la zone de transition (Fig. 1.4). En dessous de la zone de transition, $\delta L/L$ suit un comportement adiabatique traditionnel, et donc augmente régulièrement vers l'extérieur, contribuant ainsi à l'atténuation du mode comme dans une étoile « normale ». Au delà de la région de transition, δL devient quasiment constant, on passe en régime de *luminosité gelée*. La zone d'ionisation ne fait alors que très peu varier la luminosité qui reste quasi-constante. Le schéma 1.4 montre que $\delta L/L$ ne décroît à aucun moment. Globalement, tous les modes sont donc amortis et l'étoile n'oscille pas (Cox 1967).

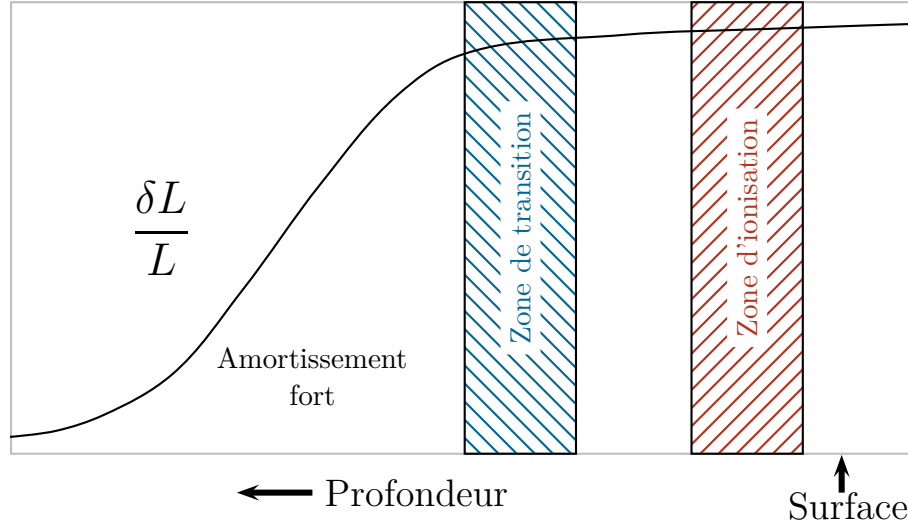


FIG. 1.4: Cas d'une étoile chaude où la zone d'ionisation (hachures rouges) est au-dessus de la zone de transition (hachures bleues). Les variations de luminosité $\delta L/L$ sont indiquées en noir.

1.3.2 Dans la bande d'instabilité

Considérons maintenant le cas d'une température effective plus faible, de telle sorte que la zone d'ionisation recouvre la zone de transition (Fig. 1.5). Dans les profondeurs de l'étoile, l'amortissement est toujours important, et $\delta L/L$ augmente régulièrement jusqu'à la zone de transition. Dans la zone de transition, les modes sont fortement excités, on est à la limite quasi-adiabatique et $\delta L/L$ diminue fortement. Au-dessus, les transformations sont non-adiabatiques et la luminosité reste gelée, mais à une petite valeur (la valeur qu'elle avait en sortie de la zone de transition). La contribution de cette zone de surface à la stabilisation est donc beaucoup plus faible que dans le cas précédent et l'amortissement est nettement réduit du fait de la position plus propice de la zone d'ionisation.

C'est précisément dans une telle condition de recouvrement des deux zones que l'étoile a une possibilité d'être instable (e.g. Gilliland *et al.* 1998). Il est alors possible de définir une

bande d'instabilité des Céphéides correspondant à la plage de T_{eff} permettant ce recouvrement des deux zones (ionisation et transition). De plus, cette condition, $T_{ionisation} \simeq T_{TR}$, permet de mettre en évidence l'espèce à l'origine du κ -mécanisme des Céphéides. Au vu des valeurs estimées par King & Cox (1968), i.e. $T_{TR} = 40000$ K, c'est la transition $He^+ \rightleftharpoons He^{++}$ qui est principalement responsable de l'oscillation des Céphéides.

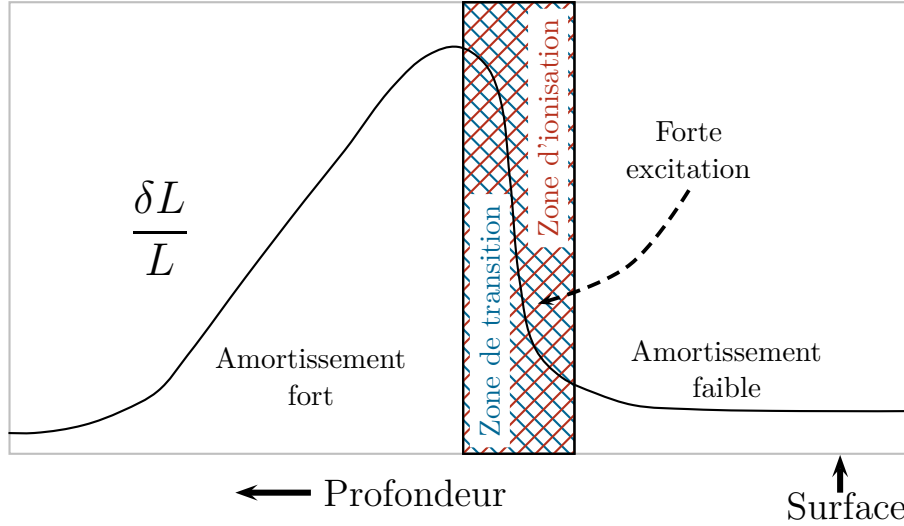


FIG. 1.5: Cas d'une étoile dans la bande d'instabilité où la zone d'ionisation (hachures rouges) et la zone de transition (hachures bleues) sont superposées. Les variations de luminosité $\delta L/L$ sont indiquées en noir.

1.3.3 Le bord rouge...

Pour des températures effectives encore plus basses, la zone d'ionisation se retrouve dans la zone quasi-adiabatique. Il y a bel et bien une contribution positive importante au niveau du saut d'opacité, mais cette excitation est compensée par les couches situées au-dessus.

Sur la figure 1.6, on note la décroissance de $\delta L/L$ au niveau de la zone d'ionisation et sa croissance régulière jusqu'à la surface. Comme dans la Céphéide chaude de la figure 1.4, la luminosité est gelée à la surface sur une valeur de $\delta L/L$ forte, entraînant ainsi un amortissement important. L'ensemble de ces contributions négatives l'emporte donc sur l'excitation fournie dans la zone d'ionisation et l'étoile est de nouveau stable vis-à-vis du κ -mécanisme.

1.3.4 ...et ses difficultés de modélisation

Le raisonnement présenté précédemment permet de comprendre comment une étoile peut devenir au cours de son trajet évolutif successivement stable aux températures basses ($T \lesssim 4200$ K), puis instable pour une certaine plage de températures effectives et de nouveau stable pour des températures plus chaudes ($T \gtrsim 7500$ K) (Fig. 1.2b). Phénoménologiquement, le concept de région de transition permet de bien décrire les différents états d'une Céphéide au cours de sa vie et de mettre ainsi en évidence la notion de bande d'instabilité.

Néanmoins cette description est « idéalisée » puisqu'elle ne repose que sur des modèles purement radiatifs. En réalité, dans les Céphéides les plus froides, proches du bord rouge de la bande d'instabilité (Fig. 1.2a), une zone convective importante apparaît à la surface de

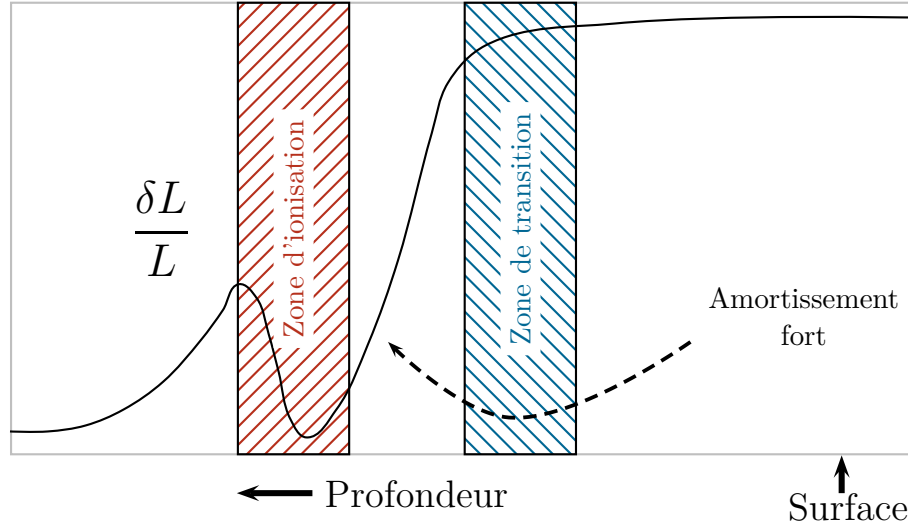


FIG. 1.6: Cas d'une étoile froide où la zone d'ionisation (hachures rouges) est au-dessous de la zone de transition (hachures bleues). Les variations de luminosité $\delta L/L$ sont indiquées en noir.

l'étoile. Dès lors, la description présentée dans la figure 1.6 est trop simpliste pour rendre compte de la situation réelle. En effet, les mouvements de matière associés à la convection peuvent potentiellement détruire l'accumulation d'énergie lors des phases de compression nécessaire au κ -mécanisme. Cette tendance est accentuée si le temps caractéristique de retournement de la convection est proche de la période du mode instable. Dans ce cas, un couplage fort s'installe entre l'oscillation et la convection et un modèle où la convection est supposée gelée ne suffit plus. Depuis les modèles *one-zone* de Baker & Kippenhahn (1965), on sait que la bande d'instabilité donnée par des modèles purement radiatifs (i.e. avec flux convectif gelé) a tendance à être plus large que la bande d'instabilité observée (e.g. Gautschy & Saio 1996). Autrement dit, la position du bord bleue est correctement reproduite alors que le bord rouge prédit est beaucoup plus froid que celui observé. Depuis ces travaux, il est admis que c'est le développement de la convection qui ramène la stabilité et « tue » ainsi les pulsations dans les Céphéides à basse température effective.

1.3.5 Vers une solution ?

La solution pour prendre correctement en compte le couplage convection-pulsations a été de développer tout d'abord des modèles de longueur de mélange (MLT) dépendante du temps. Au cours des années 1980, Stellingwerf et Kuhfuß développent ainsi deux modèles de MLT dépendante du temps relativement proches qui seront largement repris et améliorés par la suite (e.g. Yecko *et al.* 1998; Bono *et al.* 1999; Kolláth *et al.* 2002). Nous allons détailler dans la section qui suit la construction de ces modèles et les diverses approximations propres à ce genre d'approche. Nous détaillerons ensuite les principaux résultats obtenus par la MLT dépendante du temps dans le §1.4.6 et reviendrons alors sur leurs différentes limitations.

1.4 Théories de la longueur de mélange dépendante du temps

La philosophie de la construction des équations de longueur de mélange dépendante du temps peut être résumée en quatre points principaux :

1. Il faut tout d'abord séparer toutes les quantités physiques en grandeurs moyennes et en grandeurs fluctuantes.
2. Puis simplifier le système d'équations via l'approximation anélastique. Les équations obtenues font alors intervenir des corrélations doubles des quantités fluctuantes.
3. Ces corrélations doubles sont ensuite toutes estimées comme étant des fonctions de l'énergie turbulente

$$\mathcal{E}_t = \left\langle \frac{u'^2}{2} \right\rangle \quad (1.26)$$

seule corrélation double conservée dans le problème.

4. Pour fermer le système d'équations, il faut écrire une équation spécifique à l'énergie turbulente et éliminer les corrélations triples qui apparaissent par des modèles de gradient.

Nous donnerons ici quelques éléments détaillant les deux premiers points et renvoyons d'ores et déjà le lecteur à l'appendice A.2 pour une démonstration plus exhaustive des équations. En revanche, nous détaillerons ici les points 3 et 4 qui contiennent l'essentiel des hypothèses propres aux modèles de MLT.

1.4.1 Construction du système d'équations

Dans un premier temps, pour modéliser la turbulence, toutes les grandeurs physiques sont écrites sous la forme

$$x = \langle x \rangle + x', \quad (1.27)$$

où $\langle x \rangle$ représente une grandeur physique quelconque moyennée horizontalement. En coordonnées sphériques par exemple, cette moyenne peut s'écrire comme

$$\langle x \rangle(r, t) = \int x(r, \theta, \phi, t) \frac{d\Omega}{4\pi} \quad \text{avec} \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi. \quad (1.28)$$

La grandeur x' désigne la grandeur fluctuante et on obtient immédiatement $\langle x' \rangle = 0$. Cette définition de la moyenne horizontale entraîne différentes propriétés utiles, comme par exemple,

$$\langle \nabla x \rangle = \nabla \langle x \rangle$$

$$\langle \text{div } \vec{x} \rangle = \text{div } \langle \vec{x} \rangle \quad (1.29)$$

$$\langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle a'b' \rangle$$

avec a et b étant des scalaires, des vecteurs ou des tenseurs d'ordre 2.

Pour l'équation de continuité, par exemple, nous développons la densité ρ et la vitesse \vec{u} en grandeurs moyennes et en grandeurs fluctuantes, puis nous moyennons l'expression obtenue. On obtient alors

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \text{div} (\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle + \langle \rho' \vec{u}' \rangle) = 0. \quad (1.30)$$

Afin de simplifier notablement les équations, nous allons appliquer *l'approximation anélastique* (Gough 1969; Kuhfuß 1986; Gehmeyr & Winkler 1992b; Dintrans & Rieutord 2001) qui va permettre filtrer les ondes sonores dans notre problème. Cette approximation ne sera valable que si l'on se cantonne à des nombres de Mach faibles, i.e. $u \ll c_s$. Cela revient à considérer les fluctuations des différentes grandeurs physiques comme des perturbations des grandeurs moyennes (sauf pour les fluctuations de vitesse \vec{u}'). En conséquence tous les termes d'ordre 2 et plus seront négligés à part pour \vec{u}' . Dans ce cadre là, l'équation de continuité s'écrit simplement

$$\boxed{\operatorname{div}(\langle \rho \rangle \vec{u}') = 0.} \quad (1.31)$$

Ce genre de calcul peut être répété pour les équations de quantité de mouvement et d'énergie. Les différentes étapes du calcul sont largement détaillées dans l'annexe A.2.

1.4.2 Modélisation du tenseur de Reynolds

Pour l'équation de la quantité de mouvement, nous avons montré dans l'appendice A.2 que l'on a

$$\frac{\partial \langle \vec{u} \rangle}{\partial t} + \left(\langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{\nabla} \right) \langle \vec{u} \rangle = -\frac{1}{\langle \rho \rangle} \vec{\nabla} \langle p \rangle + \vec{g} + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left\langle \operatorname{div} \left(\overline{\overline{\sigma}} + \overline{\overline{\mathcal{R}}} \right) \right\rangle, \quad (1.32)$$

où

$$\overline{\overline{\mathcal{R}}} \equiv -\langle \rho \rangle \langle \vec{u}' \otimes \vec{u}' \rangle \quad (1.33)$$

est le tenseur de Reynolds. Ce tenseur fait apparaître une corrélation double de la fluctuation de vitesse \vec{u}' , il est donc nécessaire de faire un modèle de fermeture pour l'estimer. Les modèles de longueur de mélange dépendante du temps reposent sur une idée originale de Boussinesq : le tenseur de Reynolds peut être modélisé de manière analogue au tenseur des contraintes. Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses $\overline{\overline{\sigma}}$ s'écrit

$$\overline{\overline{\sigma}} = \langle \rho \rangle \nu \left(\overline{\overline{\nabla u}} + {}^t \overline{\overline{\nabla u}} - \frac{2}{3} \overline{\overline{I}} \operatorname{div} \vec{u} \right) + \frac{1}{3} \langle \rho \rangle \zeta \operatorname{div} \vec{u} \cdot \overline{\overline{I}}, \quad (1.34)$$

où ν désigne la viscosité de cisaillement et ζ la viscosité de volume. De manière analogue, le tenseur de Reynolds est donc modélisé sous la forme suivante

$$\overline{\overline{\mathcal{R}}} = \langle \rho \rangle \mu \left(\overline{\overline{\nabla u}} + {}^t \overline{\overline{\nabla u}} - \frac{2}{3} \overline{\overline{I}} \operatorname{div} \langle \vec{u} \rangle \right) + \frac{1}{3} \langle \rho \rangle \langle u'^2 \rangle \overline{\overline{I}}. \quad (1.35)$$

Dans cette expression, le seul paramètre libre est la viscosité turbulente μ . Nous ferons par la suite l'hypothèse que la viscosité moléculaire, représentée par les coefficients ν et ζ , est négligeable devant la viscosité turbulente, ce qui revient à faire l'hypothèse que nous travaillons à nombre de Reynolds très élevé. En conséquence, nous éliminons dans l'équation (1.32) et dans les équations d'énergies (A.41) et (A.50) données dans l'appendice tous les termes impliquant des viscosités moléculaires quand une viscosité turbulente apparaît.

Il ne reste alors qu'un seul terme faisant intervenir $\overline{\overline{\sigma}}$ dans les équations (A.41) et (A.50), dans le terme $\left\langle \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\nabla u'}} \right\rangle$. Ce dernier représente la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Il est modélisé par un argument dimensionnel du type

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle} \left\langle \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\nabla u'}} \right\rangle \simeq \frac{\mathcal{E}_t}{\tau_{\text{dis}}} \quad \text{avec} \quad \tau_{\text{dis}} = \frac{\Lambda}{\mathcal{E}_t^{1/2} \alpha_d}, \quad (1.36)$$

où α_d est un paramètre sans dimension et Λ une échelle de longueur (type longueur de mélange). Dans ces conditions τ_{dis} représente une échelle de temps caractéristique pour la dissipation visqueuse. Nous introduirons par la suite la pression turbulente définie par

$$p_t = \frac{2}{3} \langle \rho \rangle \mathcal{E}_t, \quad (1.37)$$

ou encore, de manière plus générale en utilisant un coefficient sans dimension,

$$\boxed{p_t = \alpha_p \langle \rho \rangle \mathcal{E}_t.} \quad (1.38)$$

1.4.3 Équations finales

A partir de cette hypothèse sur le tenseur de Reynolds, nous pouvons réécrire les équations (A.27), (A.41) et (A.50). Le système final peut donc s'exprimer comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \text{div} (\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle) = 0, \\ D_t \langle \vec{u} \rangle = \vec{g} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \vec{\nabla} (p + p_t) + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \overrightarrow{\text{div}} \langle \overline{\overline{\mathcal{R}_v}} \rangle, \\ D_t (\langle e \rangle + \mathcal{E}_t) = -\frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div} (\vec{\mathcal{F}}_r + \vec{\mathcal{F}}_c + \vec{\mathcal{F}}_t) - \frac{1}{\langle \rho \rangle} (p + p_t) \text{div} \langle \vec{u} \rangle + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \overline{\overline{\mathcal{R}_v}} : \overline{\overline{\nabla \langle u \rangle}} \rangle, \\ D_t \mathcal{E}_t = \mathcal{S}_t - \alpha_d \frac{\mathcal{E}_t^{3/2}}{\Lambda} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div} \vec{\mathcal{F}}_t - \frac{1}{\langle \rho \rangle} p_t \text{div} \langle \vec{u} \rangle + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \overline{\overline{\mathcal{R}_v}} : \overline{\overline{\nabla \langle u \rangle}} \rangle, \end{array} \right. \quad (1.39)$$

où $\overline{\overline{\mathcal{R}_v}}$ représente la contribution purement visqueuse du tenseur de Reynolds (on a en fait $\overline{\overline{\mathcal{R}}} = \overline{\overline{\mathcal{R}_v}} - p_t \overline{\overline{\mathbf{I}}}$). Les flux radiatif, convectif et cinétique ainsi que le terme source \mathcal{S}_t sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{F}}_r = -K \vec{\nabla} \langle T \rangle \\ \vec{\mathcal{F}}_c = \langle \langle \rho \rangle h' \vec{u}' \rangle, \\ \vec{\mathcal{F}}_t = \left\langle \frac{1}{2} \langle \rho \rangle u'^2 \vec{u}' \right\rangle, \\ \mathcal{S}_t = - \left\langle \vec{u}' \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right)' \right\rangle \end{array} \right. \quad (1.40)$$

Afin de résoudre le système (1.39), il est nécessaire d'estimer les termes \mathcal{F}_t , \mathcal{F}_c , \mathcal{S}_t et μ , la viscosité turbulente, pour obtenir un ensemble complet d'équations. Comme on peut le constater, ce système d'équations constitue un modèle de convection turbulente dit à *une équation*. Il ne s'agit donc pas en toute rigueur d'un véritable modèle $k - \epsilon$ puisque la dissipation turbulente est estimée par des considérations dimensionnelles (qui permettent de retrouver une loi de type Kolmogorov).

1.4.4 Approximation de diffusion et viscosité turbulente

Dans le cas général, il est possible d'enrichir le système d'équations (1.39) de deux équations supplémentaires traduisant respectivement l'évolution de $\langle T'^2 \rangle$ et de $\langle T' \vec{u}' \rangle$. Ces équations peuvent être obtenues de manière analogue à la démonstration que nous avons donnée pour l'évolution de l'énergie turbulente \mathcal{E}_t . Cette idée de considérer un système plus complet avec 3 équations traduisant l'évolution des corrélations doubles a été introduite par Castor en 1968. Bien entendu, comme nous avons pu le voir au travers du flux cinétique \mathcal{F}_t , ces équations font apparaître des corrélations triples qu'il convient d'estimer. Afin de fermer le système d'équations, Castor a eu l'idée d'approximer les corrélations triples comme de simples fonctions des corrélations doubles. L'idée principale est de considérer que les éléments convectifs transportent une quantité de mouvement et de l'énergie de la même manière que le font les molécules dans un gaz. L'*approximation de diffusion*, valable si les libres parcours moyens sont petits devant l'échelle de longueur caractéristique, suppose que le flux d'une certaine quantité est proportionnel au gradient de sa valeur moyenne (de manière analogue à la loi de Fick). Cette hypothèse a permis à Castor de fermer son système d'équations.

Néanmoins, comme nous l'avons précédemment présenté, nous ne nous intéressons ici qu'à un modèle de convection turbulente à une seule équation (celle de l'énergie turbulente) en ne considérant pas les deux autres. Cette hypothèse lourde vient de [Stellingwerf \(1982b\)](#) qui a reconsidéré les équations de Castor en ne gardant que l'équation d'énergie. Afin de fermer son système d'équations, il a alors estimé $\langle T' \bar{u}' \rangle$ en se référant à la théorie de [Böhm-Vitense](#). Nous détaillerons ses résultats par la suite. Dans ce cadre, toutes les corrélations doubles et triples peuvent être exprimées en fonction de grandeurs physiques déjà connues et de l'énergie turbulente. Nous suivrons principalement par la suite la démonstration introduite par [Kuhfuß \(1986\)](#), [Gehmeyer & Winkler \(1992b\)](#) et améliorée par [Wuchterl & Feuchtinger \(1998\)](#) (qui ont rendu le modèle de Stellingwerf plus « auto-cohérent »). Nous présenterons enfin quelques compléments sur les différences principales entre les différents modèles en présence.

1.4.4.1 Viscosité turbulente μ

Afin de déterminer complètement le tenseur de Reynolds, il est nécessaire d'exprimer la viscosité turbulente μ . Dans le cadre de l'approximation de diffusion, cette viscosité peut être modélisée par analogie avec le coefficient de diffusion apparaissant dans la loi de Fick. Dans ce cas là, on peut simplement écrire

$$\mu = \frac{1}{3} l \delta u, \quad (1.41)$$

où l est une longueur caractéristique et δu une vitesse caractéristique. Le coefficient $1/3$ vient de l'hypothèse que la turbulence est isotrope. Choisissons la longueur de mélange Λ comme échelle de longueur caractéristique et estimons δu comme suit

$$\delta u = \left[\frac{1}{3} \langle u'^2 \rangle \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\mathcal{E}_t}, \quad (1.42)$$

où encore une fois l'isotropie de la turbulence a été supposée. Cela conduit au résultat préconisé par Ledoux ([Ledoux & Walraven 1958](#)). Afin de généraliser, introduisons un coefficient α_μ et on obtient alors

$$\boxed{\mu = \alpha_\mu \Lambda \sqrt{\mathcal{E}_t}}. \quad (1.43)$$

1.4.4.2 Flux turbulent \mathcal{F}_t

$\vec{\mathcal{F}}_t$ peut être vu comme un flux d'énergie turbulente. Dans le cadre de l'approximation de diffusion présentée précédemment, on peut donc écrire

$$\vec{\mathcal{F}}_t = -D \vec{\nabla} \mathcal{E}_t, \quad (1.44)$$

où D est un coefficient de diffusion de dimension $[D] = [L][u][\rho]$. La vitesse caractéristique apparaissant dans ce coefficient de diffusion peut être écrite à partir de la vitesse donnée en Eq. (1.42). On obtient alors

$$\boxed{\vec{\mathcal{F}}_t = -\alpha_t \langle \rho \rangle \sqrt{\mathcal{E}_t} \Lambda \vec{\nabla} \mathcal{E}_t}, \quad (1.45)$$

où α_t est un second paramètre libre à ajuster.

1.4.4.3 Flux convectif \mathcal{F}_c

Le terme suivant à modéliser est le flux convectif $\vec{\mathcal{F}}_c$. Dans des modèles de fermeture de type *approximation de diffusion*, le flux convectif est mieux formulé en faisant

intervenir le gradient d'entropie (Gehmeyr & Winkler 1992b). Écrivons donc la relation thermodynamique suivante

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp. \quad (1.46)$$

Dans le cadre de l'approximation anélastique précédemment décrite, il est possible de négliger les fluctuations de pression devant les fluctuations d'entropie. On obtient alors

$$\langle \langle \rho \rangle \vec{u}' s' \rangle = -\alpha_c \Lambda \sqrt{\mathcal{E}_t} \langle \rho \rangle \vec{\nabla} \langle s \rangle, \quad (1.47)$$

où α_c est un coefficient qu'il sera nécessaire d'ajuster par la suite. On obtient donc pour le flux convectif

$$\boxed{\vec{\mathcal{F}}_c = -\alpha_c \Lambda \sqrt{\mathcal{E}_t} \langle \rho \rangle \langle T \rangle \vec{\nabla} \langle s \rangle.} \quad (1.48)$$

Une autre formulation possible peut s'écrire

$$\boxed{\vec{\mathcal{F}}_c = \alpha_c \Lambda \sqrt{\mathcal{E}_t} \langle \rho \rangle \langle T \rangle \frac{c_p}{H_p} (\nabla - \nabla_{\text{adia}}),} \quad (1.49)$$

avec

$$H_p \equiv - \left(\frac{d \ln p}{dr} \right)^{-1}, \quad (1.50)$$

l'échelle de pression, c_p la chaleur spécifique à pression constante et $\nabla = \partial \ln T / \partial \ln p$.

1.4.4.4 Terme source \mathcal{S}_t

Là encore, il est nécessaire de se ramener à une corrélation de type $\langle u' s' \rangle$. Pour ce faire, écrivons l'identité thermodynamique en négligeant encore une fois toutes les fluctuations de pression :

$$ds \simeq \frac{1}{T} dh. \quad (1.51)$$

Avec $dh = c_p dT$, on peut alors en déduire

$$s' = c_p \frac{T'}{\langle T \rangle}. \quad (1.52)$$

En utilisant l'équation des gaz parfaits³, on obtient alors

$$\rho' = -\frac{\langle \rho \rangle}{c_p} s'. \quad (1.53)$$

Pour le terme source, cela revient à écrire

$$\mathcal{S}_t = - \left\langle \vec{u}' \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right)' \right\rangle = \frac{1}{\langle \rho \rangle^2} \vec{\nabla} \langle p \rangle \langle \vec{u}' \rho' \rangle. \quad (1.54)$$

Avec Eq. (1.53), on en déduit

$$\mathcal{S}_t = -\frac{1}{\langle \rho \rangle^2} \vec{\nabla} \langle p \rangle \left(\frac{\langle \rho \rangle}{c_p} \langle \vec{u}' s' \rangle \right). \quad (1.55)$$

³Attention aux notations, Stellingwerf (1982b), Gehmeyr & Winkler (1992b) et Yecko *et al.* (1998) font intervenir un coefficient thermodynamique $\beta = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ (appelé Q par Stellingwerf), alors que Kuhfuß (1986) et Wuchterl & Feuchtinger (1998) utilisent un coefficient $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$, ce qui induit de légères différences.

En faisant intervenir le flux convectif, on obtient alors

$$\mathcal{S}_t = -\frac{1}{\langle \rho \rangle^2 c_p \langle T \rangle} \vec{\nabla} \langle p \rangle \cdot \vec{\mathcal{F}}_c. \quad (1.56)$$

Ce résultat peut également s'écrire

$$\mathcal{S}_t = -\frac{1}{\langle \rho \rangle \langle p \rangle} \nabla_{\text{adia}} \vec{\nabla} \langle p \rangle \cdot \vec{\mathcal{F}}_c, \quad (1.57)$$

comme donné par [Wuchterl & Feuchtinger \(1998\)](#). En définitive, nous pouvons écrire pour le terme source

$$\boxed{\mathcal{S}_t = \alpha_c \sqrt{\mathcal{E}_t} \Lambda \frac{\langle T \rangle}{\langle p \rangle} \nabla_{\text{adia}} \vec{\nabla} \langle p \rangle \cdot \vec{\nabla} \langle s \rangle}, \quad (1.58)$$

où α_c est le même paramètre que celui donné en Eq. (1.48). Notons qu'on peut éventuellement faire intervenir un nouveau paramètre libre indépendant, noté α_s par la suite, à la place du paramètre α_c donné ci-dessus (e.g. [Yecko et al. 1998](#)). Une autre formulation possible de ce terme source peut être obtenue :

$$\boxed{\mathcal{S}_t = \alpha_s \sqrt{\mathcal{E}_t} \Lambda \frac{\langle T \rangle}{\langle p \rangle^2} \nabla_{\text{adia}} c_p (\nabla \langle p \rangle)^2 (\nabla - \nabla_{\text{adia}})}. \quad (1.59)$$

De l'énergie turbulente est générée si ce terme source \mathcal{S}_t est positif, ce qui correspond, avec l'équation précédente, à $\nabla > \nabla_{\text{adia}}$. On retrouve l'expression du critère de Schwarzschild dans la génération d'énergie turbulente. Notons que dans le cas d'un fluide à plusieurs composantes, le terme source fait directement intervenir le critère de Ledoux (e.g. [Kuhfuß 1986](#)) et prend alors en compte des effets comme le phénomène de *semi-convection*. Le système est alors fermé. Il ne reste plus qu'à calculer le tenseur de Reynolds dans le cas purement radial.

1.4.4.5 Variantes - Modélisations analogues

Le modèle de Stellingwerf est assez proche de celui que nous venons de présenter mais possède quelques différences essentielles qu'il convient de souligner, d'autant plus que ce modèle est encore utilisé par le groupe de G. Bono (e.g. [Bono & Stellingwerf 1994](#)). Dans ce modèle, [Stellingwerf](#) ne calcule pas explicitement le tenseur de Reynolds comme nous l'avons fait et il ne conserve dans ces équations que la pression turbulente. Pour prendre en compte les effets de la viscosité turbulente, il rajoute ensuite de manière *ad hoc* un terme de pression visqueuse (e.g. [Bono & Stellingwerf 1994](#)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \text{div} (\langle \rho \rangle \vec{u}') = 0, \\ \frac{\partial \langle \vec{u} \rangle}{\partial t} + (\langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{\nabla}) \cdot \langle \vec{u} \rangle = \vec{g} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \vec{\nabla} (p + p_t + p_\mu), \\ D_t (\langle e \rangle + \mathcal{E}_t) = -\frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div} (\vec{\mathcal{F}}_r + \vec{\mathcal{F}}_c) - \frac{1}{\langle \rho \rangle} (p + p_t + p_\mu) \text{div} \langle \vec{u} \rangle, \\ D_t \mathcal{E}_t = \mathcal{S}_t - \alpha_d \frac{\mathcal{E}_t^{3/2}}{\Lambda} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div} \vec{\mathcal{F}}_t - \frac{1}{\langle \rho \rangle} (p_t + p_\mu) \text{div} \langle \vec{u} \rangle. \end{array} \right. \quad (1.60)$$

Dans ces équations, une pression visqueuse apparaît p_μ . Ce terme est sensé représenter la *cascade turbulente* qui va tendre à dégrader les éléments convectifs vers des échelles

de longueur de plus en plus petites. Par des considérations analogues à celles présentées précédemment, ce terme est modélisé par

$$p_\mu = -\alpha_\mu \langle \rho \rangle \sqrt{\mathcal{E}_t} \Lambda \frac{d\langle u \rangle}{dr}. \quad (1.61)$$

Ce résultat est différent des termes plus rigoureux issus du développement de $\overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathcal{R}_v}}$ et $\overline{\overline{\mathcal{R}_v}} : \overline{\overline{\nabla \langle u \rangle}}$. Pour le flux cinétique \mathcal{F}_t apparaissant dans Eq. (1.60), la modélisation est identique à celle donnée en Eq. (1.45).

Concernant le flux convectif, [Stellingwerf](#) n'a pas choisi d'utiliser le gradient d'entropie mais il a cherché à estimer la corrélation double $\langle u'T' \rangle$ d'une manière différente en utilisant les résultats de [Böhm-Vitense](#) :

$$\langle u'T' \rangle = 2\mathcal{E}_t \left(\frac{\Delta T}{\delta u} \right), \quad (1.62)$$

où ΔT et δu sont donnés par les équations de la MLT (voir [Vitense 1953](#); [Böhm-Vitense 1958](#)). Le résultat final s'écrit

$$\mathcal{F}_c = 2\alpha_c c_p \mathcal{E}_t \langle \rho \rangle \frac{\langle T \rangle}{\sqrt{H_p g}} (\nabla - \nabla_{\text{adia}})^{1/2}. \quad (1.63)$$

De là, on en déduit la fonction source qui s'exprime en fonction du flux convectif

$$\mathcal{S}_t = 2\alpha_c \frac{1}{H_p \sqrt{H_p g}} \nabla_{\text{adia}} \mathcal{E}_t c_p \langle T \rangle (\nabla - \nabla_{\text{adia}})^{1/2}. \quad (1.64)$$

Cette approche, bien que basée sur certains résultats *ad hoc*, fournit des résultats très similaires à ceux présentés précédemment. Les différences principales viennent de la modélisation du flux convectif et du terme source. Cette approche a été suivie par G. Bono dans sa série d'articles sur les modèles de Céphéides (e.g. [Bono et al. 1999](#)).

Signalons aussi qu'une partie de ces résultats ont été repris par [Yecko et al. \(1998\)](#) avec une modélisation intermédiaire entre celles présentées précédemment puisqu'ils considèrent un flux convectif modélisé comme [Kuhfuß \(1986\)](#) et [Wuchterl & Feuchtinger \(1998\)](#) (Eq. 1.48), alors que le terme source est modélisé comme [Stellingwerf](#) (Eq. 1.64).

	St et BS	K, GW, WF	YKB
\mathcal{F}_c	$\propto \mathcal{E}_t (\nabla - \nabla_{\text{adia}})^{1/2}$	$\propto \sqrt{\mathcal{E}_t} (\nabla - \nabla_{\text{adia}})$	$\propto \sqrt{\mathcal{E}_t} (\nabla - \nabla_{\text{adia}})$
\mathcal{F}_t	$\propto \sqrt{\mathcal{E}_t} \nabla \mathcal{E}_t$	$\propto \sqrt{\mathcal{E}_t} \nabla \mathcal{E}_t$	$\propto \sqrt{\mathcal{E}_t} \nabla \mathcal{E}_t$
$\overline{\overline{\mathcal{R}_v}}$ ou p_μ	$\propto \sqrt{\mathcal{E}_t} \frac{d\langle u \rangle}{dr}$	$\propto \sqrt{\mathcal{E}_t} r \frac{d}{dr} \left(\frac{\langle u \rangle}{r} \right)$	$\propto \sqrt{\mathcal{E}_t} \frac{d\langle u \rangle}{dr}$
p_t	$\propto \mathcal{E}_t$	$\propto \mathcal{E}_t$	$\propto \mathcal{E}_t$
\mathcal{S}_t	$\propto \mathcal{E}_t (\nabla - \nabla_{\text{adia}})^{1/2}$	$\propto \sqrt{\mathcal{E}_t} (\nabla - \nabla_{\text{adia}})$	$\propto \mathcal{E}_t (\nabla - \nabla_{\text{adia}})^{1/2}$

TAB. 1.3: Récapitulatif des différentes paramétrisations utilisées : **St** : [Stellingwerf \(1982b\)](#), **BS** : [Bono & Stellingwerf \(1994\)](#); **K** : [Kuhfuß \(1986\)](#), **GW** : [Gehmeyr & Winkler \(1992b\)](#), **WF** : [Wuchterl & Feuchtinger \(1998\)](#); **YKB** : [Yecko et al. \(1998\)](#)

1.4.5 Estimation des paramètres α

Comme nous avons pu le voir dans les études présentées ci-dessus, les modèles de convection s'appuyant sur une seule équation de fermeture (celle de l'énergie turbulente) font apparaître différents paramètres libres qu'il est nécessaire de fixer pour résoudre le problème donné. Dès les premières publications sur ce sujet, [Stellingwerf](#) a proposé d'estimer au mieux ces coefficients à partir de données d'observations (e.g. [Stellingwerf 1982b](#)). Néanmoins, au moins 5 paramètres apparaissent dans les modèles (voir 6 si l'on introduit un coefficient α_s dans le terme source différent du α_c introduit dans celui du flux convectif). [Yecko et al. \(1998\)](#) ont montré qu'avec une telle liberté, plusieurs jeux de paramètres permettaient d'obtenir des résultats satisfaisants et très similaires.

1.4.5.1 Étude paramétrique de [Yecko et al. \(1998\)](#)

A partir d'un modèle de longueur de mélange dépendante du temps à une équation très proche de celui que nous venons de présenter⁴, [Yecko et al. \(1998\)](#) ont réalisé une étude paramétrique sur l'espace des coefficients α précédemment présentés. Pour ce faire, ils ont linéarisé les équations précédentes et ont reconstruit les bandes d'instabilité correspondantes au mode fondamental et au mode d'ordre 1 de modèles de Céphéides. Ils se sont principalement intéressés à l'influence de α_c (pour le flux convectif), α_μ (pour la viscosité turbulente) et à α_Λ (pour la longueur de mélange $\Lambda = \alpha_\Lambda H_p$), tout en gardant α_s (pour la fonction source), α_t (pour le flux cinétique) et α_d (pour la dissipation turbulente) constants.

En dépit d'une certaine contrainte apportée aux valeurs « acceptables » de paramètres, ils ont obtenu des bandes d'instabilité quasiment similaires avec des jeux très différents de paramètres (voir Tab. 1.4).

α_c	α_Λ	α_μ
0.5	0.375	1.5
0.5	0.5	1
3	0.15	9
3	0.328	3
3	0.420	1
10	0.100	25
10	0.200	6

TAB. 1.4: Exemple de jeux de paramètres donnant des bandes d'instabilité satisfaisantes avec $\alpha_t = 1$, $\alpha_s = 0.75$ et $\alpha_d = 4$ ([Yecko et al. 1998](#)).

Comme on peut le voir dans la table 1.4, il existe un facteur 20 pour les paramètres α_c et α_μ permettant d'obtenir les mêmes résultats, i.e. les mêmes bandes d'instabilité.

1.4.5.2 Contraintes sur les paramètres

Pour essayer de réduire l'espace des paramètres à une dimension plus raisonnable, une des idées principales, avancée par [Kuhfuß \(1986\)](#), est de tenter de retrouver les résultats de la théorie de la longueur de mélange de [Böhm-Vitense](#) dans le cas stationnaire. En négligeant les termes en \mathcal{F}_t et les termes faisant intervenir le tenseur de Reynolds dans l'équation de l'énergie turbulente (1.39), on peut écrire dans un cas purement statique

⁴Mis à part pour la contribution radiale « visqueuse » du tenseur de Reynolds où, au lieu de calculer explicitement la divergence de $\overline{\mathcal{R}}_v$ comme nous l'avons fait, ils ont ajouté de manière *ad hoc* une pression visqueuse comme préconisé par [Stellingwerf \(1982b\)](#).

$$\mathcal{S}_t = \alpha_d \frac{\mathcal{E}_t^{3/2}}{\Lambda} \text{ avec } \delta u = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\mathcal{E}_t}. \quad (1.65)$$

D'où, en reportant dans Eq. (1.58),

$$\alpha_s \sqrt{\frac{3}{2}} \delta u \Lambda \frac{\langle T \rangle}{\langle p \rangle^2} \nabla_{\text{adia}} c_p (\nabla \langle p \rangle)^2 (\nabla - \nabla_{\text{adia}}) = \frac{\alpha_d}{\Lambda} \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} (\delta u)^3. \quad (1.66)$$

L'expression ci-dessus peut être réécrite plus simplement

$$\delta u^2 = \frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{\alpha_d} \frac{\Lambda^2}{H_p^2} \frac{\langle p \rangle}{\langle \rho \rangle} (\nabla - \nabla_{\text{adia}}). \quad (1.67)$$

En supposant l'équilibre hydrostatique, on peut alors égaler cette expression à la valeur fournie par [Böhm-Vitense](#) dans Eq. (A.12), en faisant l'approximation grossière que $\nabla' = \nabla_{\text{adia}}$

$$\frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{\alpha_d} \Lambda^2 = \frac{\Lambda^2}{4}. \quad (1.68)$$

Soit

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_d} = \frac{3}{16}. \quad (1.69)$$

Afin d'obtenir la valeur exacte de ces paramètres, écrivons l'égalité entre le flux convectif donné en Eq. (1.48) et le flux convectif donné par la théorie de [Böhm-Vitense](#) en supposant encore une fois $\nabla' = \nabla_{\text{adia}}$, soit

$$\mathcal{F}_c = \sqrt{\frac{3}{2}} \delta u \alpha_c \Lambda \langle \rho \rangle \langle T \rangle \frac{c_p}{H_p} (\nabla - \nabla_{\text{adia}}) = \langle \rho \rangle c_p \delta u \frac{\langle T \rangle}{H_p} \frac{\Lambda}{2} (\nabla - \nabla_{\text{adia}}). \quad (1.70)$$

Ce qui conduit finalement à

$$\alpha_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (1.71)$$

De plus, comme nous l'avons déjà signalé auparavant, si l'on souhaite rester le plus cohérent possible tout au long de la démonstration, on a $\alpha_s = \alpha_c$. Il est donc possible de résumer les valeurs obtenues par

$$\begin{cases} \alpha_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \alpha_s = \alpha_c \\ \alpha_d = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \quad (1.72)$$

Avec ces contraintes, la théorie de [Böhm-Vitense](#) est retrouvée dans le cas statique sauf pour les pertes radiatives des éléments convectifs (expliquée dans l'équation A.18). Il est également possible d'estimer les valeurs des autres paramètres (ou tout au moins un ordre de grandeur). A partir de Eq. (1.42), on peut en déduire une estimation de α_μ qui s'appuie sur une isotropie de la turbulence. On obtient alors

$$\alpha_\mu = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (1.73)$$

Pour la longueur de mélange, si l'on choisit la grandeur usuelle utilisée dans les codes de physique stellaire, on obtient

$$\alpha_\Lambda = 1.5. \quad (1.74)$$

Il reste alors à estimer α_t qui représente en fait l'overshooting. [Wuchterl & Feuchtinger \(1998\)](#) préconisent par exemple de choisir $\alpha_t \approx 0.6\alpha_s$.

1.4.6 Conclusion et résultats

Le modèle hydrodynamique présenté associé au modèle de convection dépendante du temps constitue un jeu d'équations assez cohérent. Il est possible de retrouver, à la limite stationnaire, la théorie classique de [Böhm-Vitense](#). L'aspect le plus déroutant de cette approche est le fait que toute l'attention est portée sur l'équation d'énergie cinétique turbulente alors que l'équation en $\langle T'^2 \rangle$ n'est même pas écrite. Comme la fluctuation T' est aussi importante que la vitesse dans l'expression du flux convectif, cette approche de la longueur de mélange à une équation peut constituer une approximation trop sévère (cf [Baker 1987](#)).

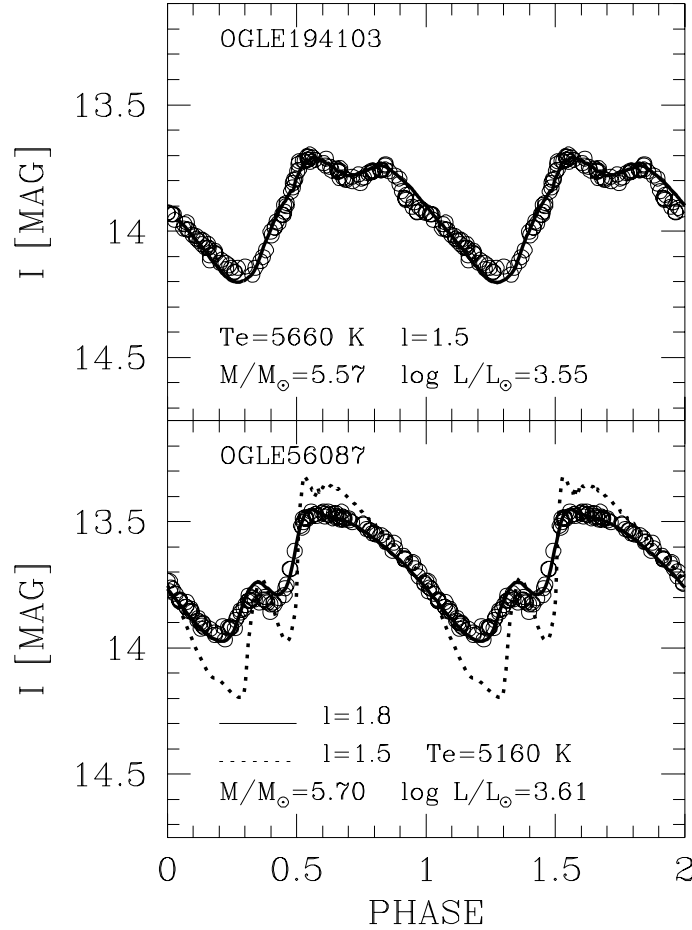


FIG. 1.7: Comparaison entre la courbe de luminosité en bande I observée par OGLE (cercles) et le modèle pour une *bump*-Céphéide de courte période (haut) et une de longue période (bas) (tiré de [Bono et al. 2002](#)). Dans la figure du bas, les deux courbes indiquent deux valeurs choisies pour la MLT : $\alpha_\Lambda = 1.8$ (traits pleins) et $\alpha_\Lambda = 1.5$ (traits pointillés).

L'idée principale de [Stellingwerf](#) a permis de simplifier notablement le système d'équations aux dérivées partielles (6 en tout) énoncées initialement par Castor et a surtout permis de favoriser l'implémentation de ces équations dans différents codes de calculs (par exemple le *Florida Code* de Buchler & al. ou *Vienna Code* de [Wuchterl & Feuchtinger](#)). En dépit d'un modèle de fermeture assez basique, les approximations présentées constituent la

meilleure modélisation actuelle de convection turbulente ayant été implémentée et validée sur des exemples concrets.

A titre d'illustration, nous donnons ici quelques résultats obtenus avec des modèles de MLT sur des cas concrets. La figure 1.7 illustre la comparaison entre des courbes de luminosité en bande I issues des données OGLE et des modèles *optimaux* correspondants (Bono *et al.* 2002). La courbe du haut concerne une *bump*-Céphéide de courte période alors que celle du bas est une Céphéide de grande période. Un accord remarquable entre les observations (cercles ouverts) et les modèles (traits pleins) est obtenu. Notons cependant que les résultats dépendent fortement des paramètres. En effet, sur la figure du bas est indiquée en traits pointillés la courbe de luminosité obtenue en changeant la valeur du coefficient α_Λ ($\alpha_\Lambda = 1.5$ au lieu de $\alpha_\Lambda = 1.8$ pour la courbe en traits pleins). On constate que l'amplitude de la courbe de luminosité est fortement impactée par ce changement relativement faible d'un paramètre.

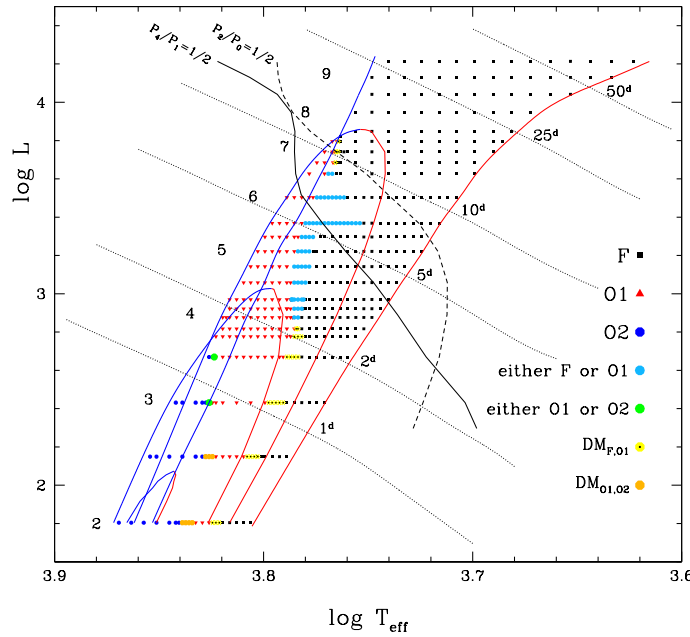


FIG. 1.8: Bande d'instabilité des Céphéides donnée par Buchler (2009). Les lignes bleues et rouges désignent les limites chaudes et froides des bandes d'instabilité pour le mode fondamental (F), le mode $n = 1$ (O1), $n = 2$ (O2) et $n = 3$ (O3). Les nombres sur la gauche indiquent des masses d'étoile en masse solaire et sont constants suivant la direction horizontale. Les nombres sur la droite sont des périodes du mode fondamental et sont constants suivant les lignes en traits pointillés.

Un autre résultat intéressant des modèles de MLT dépendante du temps concerne la reproduction de la bande d'instabilité observée. Sur la figure 1.8, les lignes bleues et rouges désignent les limites chaudes et froides des bandes d'instabilité pour le mode fondamental (F), le mode d'ordre 1 (O1), le mode d'ordre 2 (O2) et le mode d'ordre 3 (O3) (Buchler 2009). Il s'agit de limites obtenues à partir d'analyses de stabilité *linéaires*, i.e. cela signifie que les différents modes sont linéairement instables dans la zone considérée mais on n'a pas d'informations quant à leur comportement non-linéaire et leur couplages éventuels. Par exemple, la zone F/O1 donne une condition *nécessaire* pour obtenir une *beat*-Céphéide mais pas *suffisante*, puisqu'il faut réaliser la simulation non-linéaire correspondante pour obtenir cette information. C'est précisément ce qui a été fait par Buchler (2009) : chaque symbole dans la figure 1.8 correspond à l'avancement en temps du système d'équations (1.39) jusqu'à la saturation. Les nombres sur la gauche indiquent des masses d'étoiles en masse solaire et sont constants suivant la direction horizontale. Les nombres sur la

droite sont les périodes du mode fondamental et sont constants suivant les lignes en traits pointillés. La forme et la couleur du symbole est caractéristique du modèle obtenu : cercles noirs et triangles rouges pour les F et O1, Céphéides double-mode représentées par des cercles orange et jaune.

Le résultat intéressant de cette figure est qu'on retrouve la structure de la bande d'instabilité observée dans les grands relevés récents (OGLE III par exemple), e.g. la séparation entre les Céphéides F (noir), les O1 (rouge) et les O2 (bleu) avec des Céphéides double-mode situées à l'intersection des différentes zones (voir la figure 1.2a pour avoir la bande d'instabilité observée). En revanche, certains détails précis comme l'obtention de Céphéides triple-modes (F/O1/O2) n'ont pas été reproduits par ces simulations. Encore une fois, la position des bandes d'instabilité obtenues est fortement dépendante du choix de paramètres retenus (Yecko *et al.* 1998).

1.4.7 Améliorations possibles

Une des voies d'amélioration possible du modèle que nous venons de présenter est le modèle de Xiong (e.g. Xiong *et al.* 1997). Nous ne rentrerons pas dans les détails de la démonstration ici mais nous tâcherons d'en donner les éléments clés. Les hypothèses de départ sont les mêmes que celles données dans la démonstration précédente, à savoir l'hypothèse anélastique. Xiong *et al.* établit ensuite les 3 équations de Castor qui font intervenir les corrélations doubles $\langle u'^2 \rangle$, $\langle \bar{u}'T' \rangle$ et $\langle T'^2 \rangle$. Il obtient alors des corrélations triples (qui ont été coupées par l'approximation de diffusion dans les théories non-locales et qui sont considérées nulles dans les théories locales ; e.g. Ledoux & Walraven (1958) et Grigahcène *et al.* (2005)). L'idée est alors d'écrire les équations traduisant l'évolution des corrélations triples $\langle u'^2 \bar{u}' \rangle$, $\langle u'^2 T' \rangle$, $\langle \bar{u}' T'^2 \rangle$ et $\langle T'^3 \rangle$ qui font elles-mêmes intervenir des corrélations d'ordre 4. Ces corrélations d'ordre 4 sont alors estimées dans le cadre de l'*approximation quasi-normale*, ou encore approximation de Millionshtchikov (e.g. Lesieur 1997, §VII.A), qui peut être résumée comme suit : pour tout champ aléatoire suivant une loi gaussienne, les corrélations d'ordre pair peuvent être écrites en fonction des corrélations d'ordre 2. On peut alors écrire, par exemple pour les corrélations d'ordre 4,

$$\langle a'_i a'_j a'_k a'_l \rangle = \langle a'_i a'_j \rangle \langle a'_k a'_l \rangle + \langle a'_i a'_k \rangle \langle a'_j a'_l \rangle + \langle a'_i a'_l \rangle \langle a'_j a'_k \rangle. \quad (1.75)$$

Xiong *et al.* supposent donc que la fonction de distribution de la turbulence est proche d'une gaussienne afin de fermer le système d'équations. Ils obtiennent finalement, un ensemble de 10 équations aux dérivées partielles à résoudre pour caractériser la convection turbulente. Son modèle a été testé sur des modèles de RR-Lyræ et les bandes d'instabilité obtenues sont proches de celles de Dupret *et al.* (2005).

1.5 Conclusion : vers des simulations numériques directes

Les modèles de longueur de mélange reposent donc tous sur une méthode de fermeture similaire : l'approximation de diffusion. En dépit de plusieurs différences de modélisation notables, particulièrement au niveau du flux convectif (Tab. 1.3), les résultats obtenus sont prometteurs quel que soit le modèle de MLT choisi. Parmi les résultats principaux, citons la reproduction fidèle des courbes de luminosité de Céphéides observées (Fig. 1.7), ou encore l'obtention d'une bande d'instabilité proche de la structure réelle (Fig. 1.8).

L'inconvénient majeur de ce genre de modèles reste la dégénérescence importante des paramètres libres. Le tableau 1.4 illustre d'ailleurs parfaitement ce second point puisque des jeux de paramètres très différents conduisent à des bandes d'instabilité identiques. Un changement, même minime, d'un paramètre α entraîne parfois des différences très importantes dans les résultats obtenus (voir Fig. 1.7) et les paramètres *optimaux* obtenus pour un modèle d'étoile ne sont plus adaptés pour une autre (e.g. Buchler 2009). Enfin, le

grand nombre de paramètres α libres (entre 5 et 8 pour les modèles les plus récents) laisse peu d'espoirs de contraindre efficacement l'espace des paramètres.

Une solution alternative pour aborder ce problème convection-pulsations passe par la réalisation de simulations directes 2-D et 3-D non-linéaires (DNS). En dépit de leurs limitations intrinsèques liées à des contraintes numériques (un faible contraste en H_p peut être couvert, par exemple), les DNS sont le meilleur moyen de traiter toute la physique *non-linéaire* inhérente au problème de la convection oscillante. À l'aide des simulations directes, il est possible d'examiner la validité des modèles de MLT dépendante du temps présentés ici et éventuellement de donner des contraintes sur les paramètres α . La réalisation de ces simulations numériques du κ -mécanisme avec convection constitue précisément l'objectif principal de ce travail de thèse.



Sommaire

2.1	Le modèle	42
2.1.1	Le profil de conductivité radiative	42
2.1.2	Le modèle d'équilibre	42
2.1.3	Équations générales pour les oscillations	45
2.1.4	Conditions aux limites	46
2.1.5	Méthodes numériques	46
2.2	Résultats	46
2.2.1	Construction d'un modèle	46
2.2.2	Calcul des champs d'équilibre	47
2.2.3	Vecteurs propres	48
2.2.4	Études paramétriques	48
2.2.5	Intégrale de travail	52

LE but principal de ce travail de thèse est de réaliser des simulations numériques directes du problème complet avec convection, et ce en vue d'étudier la physique du couplage convection-pulsations. Néanmoins, les DNS demandant un temps de calcul très important, il est donc nécessaire dans un premier temps de réaliser des analyses *linéaires* permettant d'obtenir des modèles instables par κ -mécanisme.

Le traitement complet du κ -mécanisme dans un modèle de Céphéide réaliste nécessite de travailler avec des tables d'opacité et des équations d'état très précises. Notre idée principale est ici de *simplifier* l'approche hydrodynamique complète tout en gardant les *principaux* mécanismes physiques responsables du κ -mécanisme. Nous étudierons donc le problème suivant : la propagation d'ondes acoustiques dans une couche de gaz partiellement ionisée. Le saut d'opacité dans la zone d'ionisation, responsable du κ -mécanisme, est modélisé par une fonction paramétrique de la température, ce qui nous évite de travailler avec les tables d'opacité. L'intérêt principal de cette approche réside dans le plus grand contrôle que l'on peut avoir sur la physique du modèle. De plus, ces modèles *idéalisés* sont plus facilement compatibles avec les contraintes numériques inhérentes aux DNS que des modèles d'étoiles réalistes.

Afin de déterminer si notre modèle simplifié est capable de reproduire qualitativement le κ -mécanisme, et en particulier la notion de région de transition, nous allons dans un premier temps réaliser des modèles purement radiatifs.

2.1 Le modèle

Pour ce faire, nous allons considérer des simulations locales autour de la zone d'ionisation. Afin de simplifier l'approche, nous considérons une boîte cartésienne 2-D dans laquelle la gravité \vec{g} est supposée constante. Nous travaillerons également avec un gaz parfait monoatomique dont l'équation d'état est donnée par

$$p = R_* \rho T \quad \text{et} \quad \gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}. \quad (2.1)$$

2.1.1 Le profil de conductivité radiative

Nous avons représenté la zone d'ionisation par un profil de conductivité radiative correspondant aux sauts d'opacité observés dans les Céphéides. En réalité, la stabilité dépend des variations de la conductivité radiative avec la température et la densité (voir Eq. 1.20). Néanmoins, comme signalé précédemment, la dépendance en température est principalement responsable de la stabilité et \mathcal{K}_T est le paramètre clé. En conséquence, notre modèle négligera par la suite toute dépendance de la conductivité radiative envers la densité, i.e. $\mathcal{K}_\rho = 0$. Nous avons donc adopté un profil paramétrique dont on peut aisément faire varier la forme (largeur, profondeur et position par exemple) afin d'étudier précisément les conditions propices à l'obtention de modes instables. Le profil de conductivité radiative choisi est donné par l'équation suivante

$$K_0(T) = K_{\max} \left[1 + \mathcal{A} \frac{-\pi/2 + \arctan(\sigma T^+ T^-)}{\pi/2 + \arctan(\sigma e^2)} \right], \quad (2.2)$$

où

$$\mathcal{A} = \frac{K_{\max} - K_{\min}}{K_{\max}}, \quad T^\pm = T - T_{\text{bump}} \pm e \quad (2.3)$$

correspond à l'amplitude du « trou » de conductivité radiative. Les différents paramètres libres régissant la forme du profil sont les suivants :

- T_{bump} , la température centrale du trou de conductivité,
- K_{\max} et K_{\min} les valeurs maximale et minimale de la conductivité, \mathcal{A} étant l'amplitude relative,
- σ représente la pente du profil,
- e est sa largeur à mi-hauteur.

La figure 2.1 illustre différentes valeurs courantes pour ce jeu de paramètres. Il est donc très simple de changer la position de la zone d'ionisation ainsi que l'amplitude du profil afin de changer la valeur de \mathcal{K}_T .

2.1.2 Le modèle d'équilibre

Le modèle initial est à l'équilibre hydrostatique et radiatif sous gravité constante

$$\begin{cases} \vec{\nabla} p_0 = \rho_0 \vec{g}, \\ \text{div} \left(K_0(T_0) \vec{\nabla} T_0 \right) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

En supposant que l'on impose un flux constant F_{bot} au bas de la boîte, on obtient

$$\begin{cases} \frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g, \\ \frac{dT_0}{dz} = -\frac{F_{\text{bot}}}{K_0}. \end{cases} \quad (2.5)$$

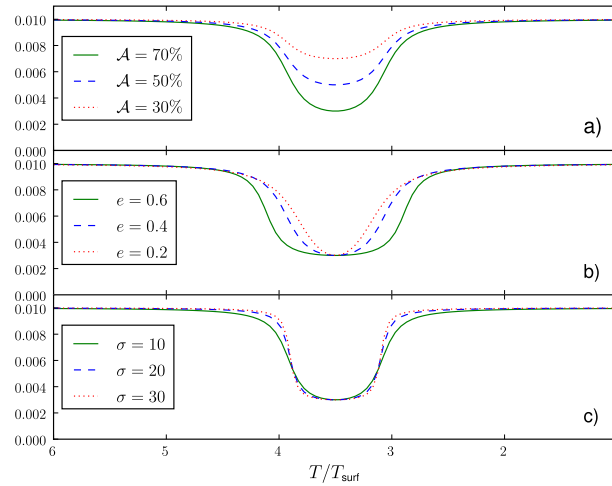


FIG. 2.1: Influence des différents paramètres sur la forme du profil de conductivité radiative : son amplitude \mathcal{A} (a), sa largeur e (b) et sa pente σ (c) pour une température centrale $T_{\text{bump}} = 3.5$ fixée. L'abscisse représente une température adimensionnée à la température de surface.

Les grandeurs physiques sont ensuite adimensionnées en utilisant :

- l'épaisseur de la couche L_z comme échelle de longueur,
- la température et la densité de surface (T_{top} et ρ_{top}) comme échelles de température et de densité,
- $\sqrt{c_p T_{\text{top}}}$ comme échelle de vitesse,
- l'échelle de gravité est donnée par $c_p T_{\text{top}}/L_z$.

Les équations (2.5) constituent un problème non-linéaire du type

$$A\vec{\psi} = B(\vec{\psi}) \quad \text{avec} \quad \vec{\psi} = (p_0, T_0), \quad (2.6)$$

où les matrices A et B sont des opérateurs différentiels. $B(\vec{\psi})$ est un terme non-linéaire puisque la conductivité radiative dépend de la température.

Dans cette première étude qui concerne le cas purement radiatif, une contrainte supplémentaire sur le modèle d'équilibre est imposée par le critère de Schwarzschild. Il faut en effet s'assurer que le trou de conductivité radiative n'entraîne pas l'apparition d'une zone convective, d'où la condition

$$\left| \frac{dT_0}{dz} \right| < \left| \frac{dT_0}{dz} \right|_{\text{adia}}, \quad (2.7)$$

qui devient avec nos grandeurs adimensionnées à

$$\left| \frac{dT_0}{dz} \right| < g. \quad (2.8)$$

Cette condition peut être traduite comme une contrainte sur le profil $K(T)$:

$$K_{\min} > \frac{F_{\text{bot}}}{g}. \quad (2.9)$$

La figure 2.2 est une représentation schématique de notre modèle. Le profil de conductivité radiative est tracé en bleu et reste systématiquement au-dessus de la limite de Schwarzschild indiquée en traits pointillés. La gravité est supposée constante et l'on impose un flux F_{bot} (flèche rouge) important à la limite inférieure du domaine.

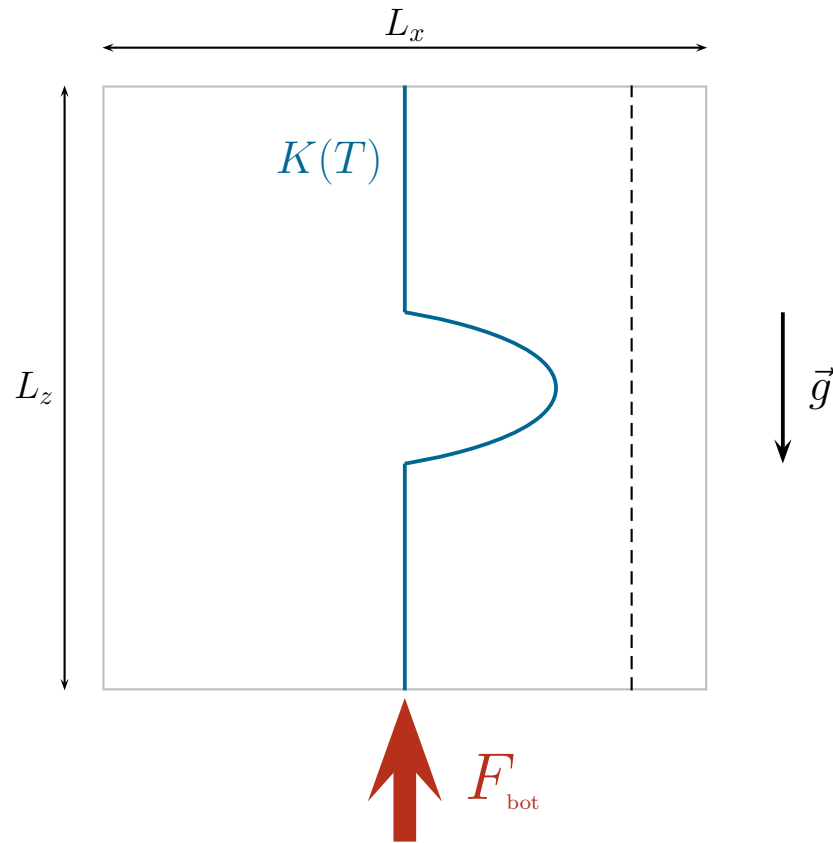


FIG. 2.2: Description schématique de notre modèle : la courbe bleue représente le profil de conductivité radiative $K(T)$, les traits pointillés désignent la limite de Schwarzschild et la flèche rouge en bas indique le flux F_{bot} imposé à cet endroit.

2.1.3 Équations générales pour les oscillations

Nous nous intéressons aux petites perturbations autour du modèle d'équilibre issu de la résolution de Eq. (2.6). Toutes les grandeurs physiques sont donc développées autour de leur valeur moyenne $X_0(\vec{r})$ de la manière suivante

$$X(\vec{r}, t) = X_0(\vec{r}) + X'(\vec{r}, t) \quad \text{avec} \quad X'/X_0 \ll 1, \quad (2.10)$$

où X' est la perturbation eulérienne de X . Les équations de conservation de la masse, du moment et de l'énergie sont linéarisées comme suit (e.g. [Unno et al. 1989](#))

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \rho' = -\rho_0 \operatorname{div} \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \ln \rho_0, \\ \lambda \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p' + \frac{\rho'}{\rho_0} \vec{g} + \nu \left(\Delta \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} + \vec{S} \cdot \vec{\nabla} \ln \rho_0 \right), \\ \lambda T' = -\frac{1}{\rho_0 c_v} \operatorname{div} \vec{F}' - (\gamma - 1) T_0 \operatorname{div} \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T_0, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

où \vec{u} , ρ' , T' et \vec{F}' représentent les perturbations de vitesse, densité, température et flux radiatif. Par la suite, nous supposons la viscosité cinématique ν constante. Le tenseur de cisaillement \vec{S} s'écrit

$$S_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u}. \quad (2.12)$$

Nous cherchons des modes propres dont la dépendance en temps est de la forme $\exp(\lambda t)$ où $\lambda = \tau + i\omega$. ω est la pulsation d'un mode propre et τ , son taux de croissance. La perturbation eulérienne du flux radiatif s'écrit

$$\vec{F}' = -K_0 \vec{\nabla} T' - K' \vec{\nabla} T_0, \quad (2.13)$$

avec

$$\frac{K'}{K_0} = \mathcal{K}_T \frac{T'}{T_0}, \quad (2.14)$$

puisque dans notre modèle, la conductivité radiative est supposée ne dépendre que de la température. Afin de simplifier l'écriture du système d'équations (2.11), on définit les nouvelles variables suivantes

$$R \equiv \rho'/\rho_0 \quad \text{et} \quad \theta = T'/T_0. \quad (2.15)$$

En utilisant ensuite le même adimensionnement que pour le calcul du modèle d'équilibre, nous obtenons pour les modes *radiaux*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda R = -\frac{du_z}{dz} - \frac{d \ln \rho_0}{dz} u_z, \\ \lambda u_z = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} T_0 \left(\frac{dR}{dz} + \frac{d\theta}{dz} \right) + g\theta + \frac{4}{3} \nu \left(\frac{d^2 u_z}{dz^2} + \frac{d \ln \rho_0}{dz} \frac{du_z}{dz} \right), \\ \lambda \theta = \gamma \chi_0 \left[\frac{d^2 \theta}{dz^2} + 2 \left(\frac{d \ln K_0}{dz} + \frac{d \ln T_0}{dz} \right) \frac{d\theta}{dz} + \frac{d \ln T_0}{dz} \frac{d \mathcal{K}_T}{dz} \theta \right] \\ \quad - (\gamma - 1) \frac{du_z}{dz} - \frac{d \ln T_0}{dz} u_z, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

où u_z est la vitesse verticale et $\chi_0 = K_0/\rho_0 c_p$ est la diffusivité radiative. Les équations (2.16) constituent un problème aux valeurs propres généralisé du type

$$A\vec{\psi} = \lambda B\vec{\psi} \quad \text{avec} \quad \vec{\psi} = (R, u_z, T_0), \quad (2.17)$$

où A et B sont des opérateurs différentiels.

2.1.4 Conditions aux limites

Le problème aux valeurs propres (2.17) est un problème d'ordre 4. Il nécessite deux conditions aux limites pour la vitesse verticale u_z et deux conditions sur la température T' . Nous avons choisi d'imposer des conditions de murs rigides pour la vitesse aux deux limites de notre domaine. Concernant la température, nous avons imposé une condition d'isolant parfait en bas et une condition de conducteur parfait en haut, soit

$$\begin{cases} u_z = 0 & \text{pour } z = [0, L_z], \\ \frac{dT'}{dz} = 0 & \text{pour } z = 0 \quad \text{et} \quad T' = 0 \quad \text{pour } z = L_z, \end{cases} \quad (2.18)$$

Avec l'adimensionnement proposé précédemment, ces conditions aux limites deviennent

$$\begin{cases} u_z = 0 & \text{pour } z = [0, 1], \\ \frac{d\theta}{dz} + \frac{d \ln T_0}{dz} \theta = 0 & \text{pour } z = 0, \\ \theta = 0 & \text{pour } z = 1. \end{cases} \quad (2.19)$$

2.1.5 Méthodes numériques

Afin de résoudre les équations du modèle d'équilibre (2.6) et le problème aux valeurs propres (2.17), nous utilisons le code spectral LSB (Linear Solver Builder, [Valdettaro et al. 2007](#)). Ces deux problèmes sont discrétisés sur la grille de Gauss-Lobatto associée aux polynômes de Tchebychev.

1. *Le modèle d'équilibre* : le calcul des champs d'équilibre nécessite la résolution d'un problème non-linéaire. Pour ce type de problème, LSB utilise la méthode de Picard basée sur un algorithme de point fixe où les équations sont résolues itérativement ([Hairer et al. 1993](#); [Fukushima 1997](#)) :

$$A\vec{\psi}_{n+1} = B(\vec{\psi}_n). \quad (2.20)$$

Cette méthode converge rapidement si la solution initiale $\vec{\psi}_0$ n'est pas trop éloignée de la solution finale (i.e. les non-linéarités ne sont pas trop importantes).

2. *Le problème aux valeurs propres* : soit le spectre complet d'oscillations est calculé par l'intermédiaire de l'algorithme QZ ([Moler & Stewart 1973](#)), soit on calcule uniquement un couple $(\lambda, \vec{\psi})$ autour d'une valeur λ donnée grâce à l'algorithme d'Arnoldi-Tchebychev ([Arnoldi 1951](#); [Saad 1992](#)).

2.2 Résultats

2.2.1 Construction d'un modèle

La difficulté principale de notre approche est de déterminer un jeu de paramètres permettant d'obtenir des modes acoustiques excités par κ -mécanisme. Comme on l'a vu

précédemment, la stratification en température est limitée par le critère de Schwarzschild et donc par la valeur de la gravité g (Eq. 2.8). De même, il semble judicieux d'avoir un contraste de densité fort dans notre boîte puisque Δm est un paramètre important permettant de contrôler la valeur du coefficient Ψ (Eq. 1.24). Ces deux contraintes (g et le coefficient Ψ) nous ont conduit à des solutions à faible densité de surface $\rho_{\text{top}} = 2.5 \times 10^{-3}$ et à forte stratification $g = 7$.

Il est ensuite nécessaire de garder une diffusivité radiative raisonnable, ce qui entraîne des contraintes sur la valeur de la conductivité radiative K_{max} . Afin de limiter les effets non-adiabatiques tout en satisfaisant les contraintes liées au κ -mécanisme, nous avons choisi une valeur $K_{\text{max}} = 10^{-2}$. Pour garder la zone purement radiative, nous avons dû prendre $F_{\text{bot}} = 2 \times 10^{-2}$ comme flux imposé en bas de la boîte. Enfin, sachant que nous utilisons des résolutions spatiales moyennes (environ 100 polynômes de Tchebychev), la viscosité est choisie en fonction, à savoir $\nu = 5 \times 10^{-4}$.

2.2.2 Calcul des champs d'équilibre

Pour calculer les champs physiques à l'équilibre, il reste encore à fixer des valeurs pour les paramètres du trou de conductivité radiative \mathcal{A} , e et σ . Une étude quantitative de l'influence de ces différents paramètres sera présentée par la suite. Une fois ceux-ci fixés, les champs d'équilibre T_0 et ρ_0 , solutions du système (2.5), sont calculés sur la grille de Gauss-Lobatto et nous pouvons ensuite en déduire les différentes grandeurs intervenant dans notre problème, comme \mathcal{K}_T ou encore la diffusivité χ_0 .

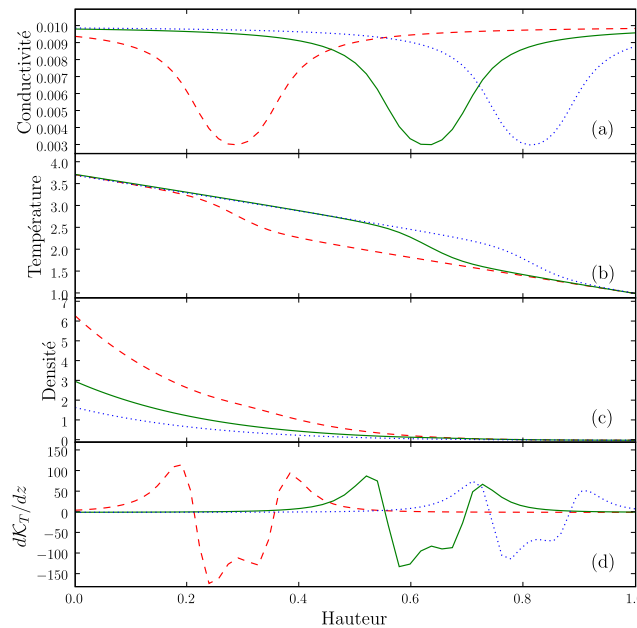


FIG. 2.3: **a)** Trois profils de conductivité radiative : $T_{\text{bump}} = 2.8$ (tirets rouges), $T_{\text{bump}} = 2.1$ (trait plein vert) et $T_{\text{bump}} = 1.7$ (pointillés bleus), avec $\mathcal{A} = 70\%$, $e = 0.4$ et $\sigma = 7$. **b)** Températures d'équilibres correspondantes. **c)** Densités d'équilibres. **d)** Profils verticaux de $d\mathcal{K}_T/dz$.

La figure 2.3 donnent quelques exemples de ces champs d'équilibre pour trois positions différentes de la zone d'ionisation :

- Un cas où la zone d'ionisation est proche de la surface correspondant à une Céphéide chaude (trait bleu en pointillés)

- Un cas où la zone d’ionisation est approximativement au milieu du domaine correspondant à une Céphéide dans la bande d’instabilité (trait plein vert).
- Un cas où la zone d’ionisation est en profondeur correspondant à une Céphéide froide (tirets rouges).

2.2.3 Vecteurs propres

Ordre n	Pulsation ω	Taux de croissance τ
0	5.439	$+2.048 \times 10^{-2}$
1	8.453	-1.987×10^{-2}
2	11.060	-5.336×10^{-2}
3	14.363	-5.311×10^{-2}
4	17.399	-8.779×10^{-2}
5	20.656	-1.066×10^{-2}
6	23.809	-1.369×10^{-2}
7	26.983	-1.690×10^{-2}
8	30.143	-2.011×10^{-2}
9	33.244	-2.376×10^{-2}

TAB. 2.1: Liste des valeurs propres obtenues pour des ordres $n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ correspondant au modèle d’équilibre vert de la figure 2.3. A chaque fois, la pulsation ω et le taux de croissance τ sont donnés.

A partir des champs d’équilibre obtenus, nous résolvons ensuite le problème (2.17) pour obtenir le spectre complet d’oscillations. Les valeurs propres pour le cas « vert » de la figure 2.3 sont données dans la table 2.1 pour les modes acoustiques radiaux d’ordre n compris entre $n = 0$ et $n = 9$. On constate que tous les modes acoustiques obtenus sont stables à l’exception du mode fondamental qui a un taux de croissance $\tau > 0$.

A l’aide de l’algorithme d’Arnoldi-Tchebychev, il est possible de dériver un vecteur propre particulier à partir d’une valeur propre spécifiée en entrée. La figure 2.4 illustre un exemple de mode propre obtenu correspondant au mode acoustique fondamental ($n = 0$) dont le taux de croissance est donné dans la table 2.1. Les trois panneaux correspondent aux fonctions propres R , u_z et θ . Notons la déformation de la température θ au niveau de la position du trou de conductivité radiative.

Dans un code spectral comme LSB, toute quantité physique est décomposée sur une base de fonctions \mathcal{C}^∞ , ici les polynômes de Tchebychev $T_n(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n T_n(z). \quad (2.21)$$

En inversant la matrice des polynômes des Tchebychev, il est alors possible de déterminer la valeur des coefficients c_n et ainsi de vérifier la convergence spectrale d’un mode propre calculé avec LSB. Un exemple de spectre obtenu à partir des coefficients $|c_n|^2$ est donné dans la figure 2.5. Pour les trois fonctions propres R (pointillés noirs), u_z (trait plein bleu) et θ (tirets verts) de la figure 2.4, la précision spectrale est atteinte avec 80 polynômes de Tchebychev.

2.2.4 Études paramétriques

Le profil de conductivité radiative choisi est parfaitement adapté pour réaliser une étude paramétrique du κ -mécanisme puisque les différents degrés de liberté \mathcal{A} , e , σ et

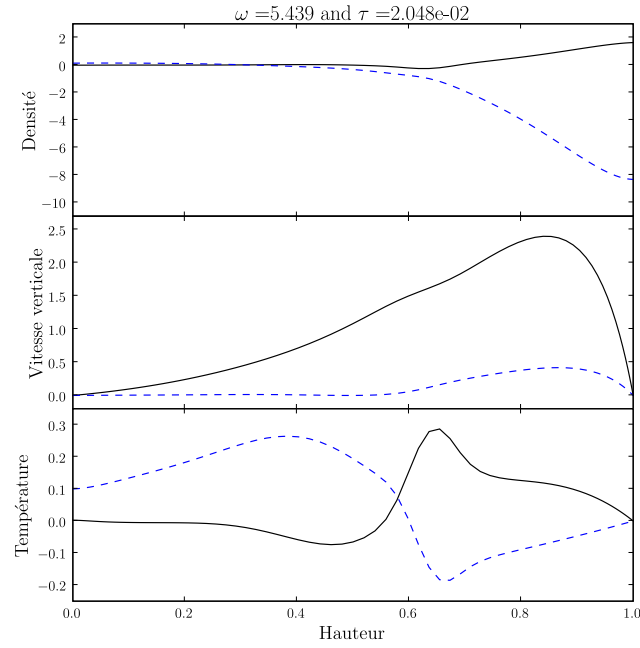


FIG. 2.4: Fonctions propres (R, u_z, θ) pour le mode acoustique fondamental correspondant à un profil de conductivité radiative avec $T_{\text{bump}} = 2.1$, $\mathcal{A} = 70\%$, $e = 0.4$ et $\sigma = 7$. Les parties réelles sont en traits pleins noirs et les parties imaginaires en tirets bleus. Le modèle d'équilibre correspond au cas tracé en vert sur la figure 2.3.

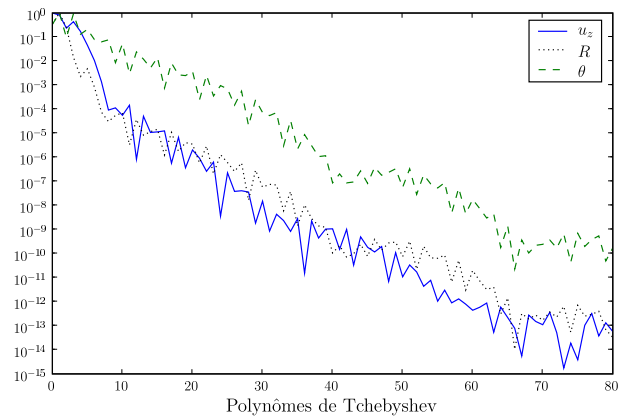


FIG. 2.5: Spectres de Tchebychev des différentes fonctions propres R (pointillés noirs), u_z (trait plein bleu) et θ (tirets verts) correspondants au mode propre de la figure 2.4.

T_{bump} peuvent être changés très facilement. Nous avons donc réalisé trois études afin de déterminer les paramètres clés conduisant à l'instabilité.

2.2.4.1 $T_{\text{bump}} - \mathcal{A}$

Dans un premier temps, nous avons étudié l'influence de l'amplitude du trou de conductivité radiative sur la stabilité des modes acoustiques. Les valeurs de σ et e ont donc été fixées et on a fait varier les valeurs de \mathcal{A} et T_{bump} . Pour chaque valeur de ce couple de paramètres, nous avons calculé le modèle d'équilibre correspondant ainsi que le spectre d'oscillations. De ce spectre, nous avons extrait la valeur du taux de croissance du mode fondamental. La figure 2.6 représente la bande d'instabilité obtenue :

- les zones sombres correspondent à des situations où le mode fondamental est stable (i.e. $\tau < 0$),
- les zones colorées sont des iso-contours en taux de croissance des modes instables (i.e. $\tau > 0$).

Les trois symboles correspondent aux modèles d'équilibres particuliers de la figure 2.3 : $T_{\text{bump}} = 1.7$ (losange bleu), $T_{\text{bump}} = 2.1$ (carré vert) et $T_{\text{bump}} = 2.8$ (cercle rouge).

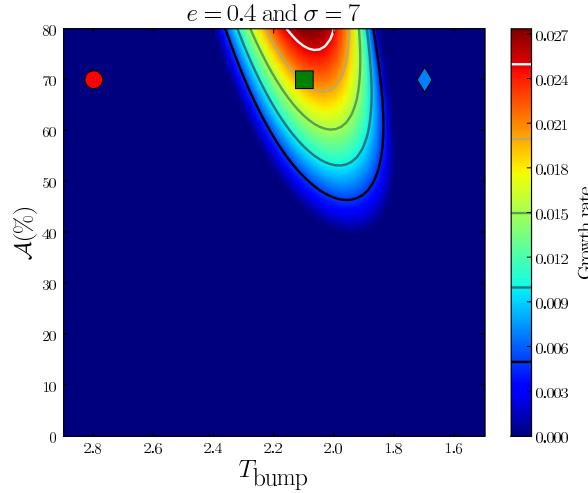


FIG. 2.6: Bande d'instabilité pour le mode acoustique fondamental dans le plan $(T_{\text{bump}}, \mathcal{A})$ pour des valeurs données de e et de σ . Les trois symboles correspondent aux trois modèles particuliers exposés dans la figure 2.3 pour $T_{\text{bump}} = 1.7$ (losange bleu), $T_{\text{bump}} = 2.1$ (carré vert) et $T_{\text{bump}} = 2.8$ (cercle rouge).

Deux résultats principaux ressortent de cette première étude : (i) les modes instables sont situés dans une région particulière ($T_{\text{bump}} \in [1.8, 2.3]$) qui semble correspondre à la notion de région de transition développée dans le paragraphe 1.2.2 ; (ii) une amplitude d'au moins $\mathcal{A} \simeq 45\%$ est nécessaire pour obtenir des modes instables. Cette idée rejoint la condition (1.21) sur \mathcal{K}_T qui montre qu'un saut d'opacité est nécessaire pour obtenir des modes instables. Ici, un trou d'une profondeur minimale est requis pour exciter le mode acoustique fondamental.

2.2.4.2 $T_{\text{bump}} - \sigma$

De la même manière, nous avons étudié l'influence de la pente σ du trou de conductivité radiative sur la stabilité. Dans cette étude \mathcal{A} et e sont constants alors que T_{bump} et σ sont variables. Comme précédemment, la figure 2.7 représente des iso-contours en taux de croissance pour le mode acoustique fondamental.

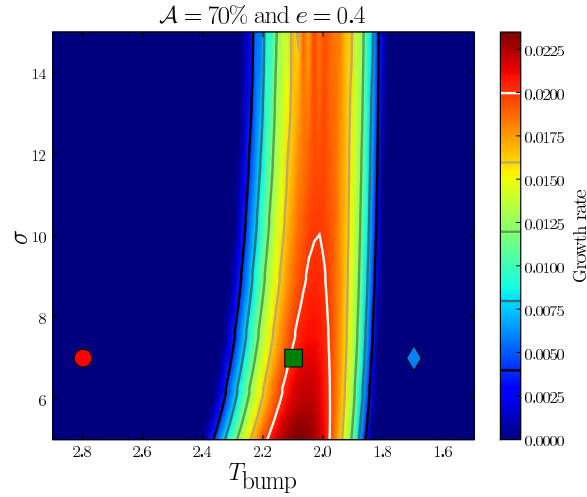


FIG. 2.7: Bande d'instabilité pour le mode acoustique fondamental dans le plan $(T_{\text{bump}}, \sigma)$ pour \mathcal{A} et e fixés. Les trois cas particuliers des figures 2.3 et 2.6 sont reproduits ici aussi.

Comme dans la figure 2.6, nous retrouvons dans cette étude une bande d'instabilité où les modes sont instables pour des valeurs de $T_{\text{bump}} \in [1.8, 2.3]$. En revanche, l'influence de la pente sur la stabilité est très faible puisque la bande d'instabilité est quasiment verticale, ce qui indique une dégénérescence vis-à-vis du paramètre σ .

2.2.4.3 $T_{\text{bump}} - e$

Enfin, nous avons étudié l'influence de la largeur e du trou de conductivité en gardant \mathcal{A} et σ constants.

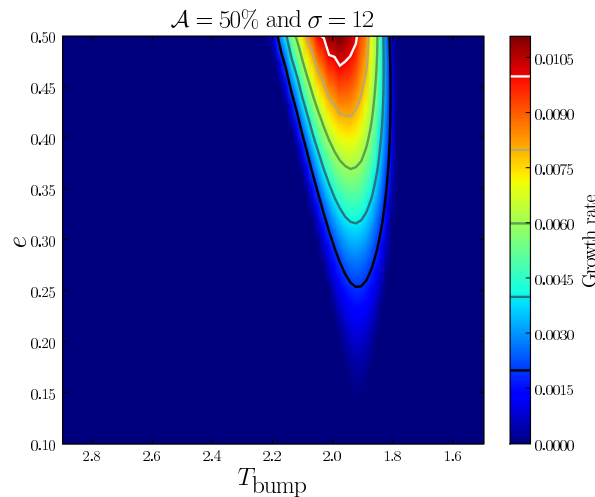


FIG. 2.8: Bande d'instabilité pour le mode acoustique fondamental dans le plan (T_{bump}, e) , pour \mathcal{A} et σ donnés.

Là encore, nous observons sur la figure 2.8 une bande d'instabilité similaire à celle obtenue dans la figure 2.6. Une valeur minimale $e_{\text{min}} \simeq 0.15$ est nécessaire pour obtenir un mode fondamental instable donc les profils trop étroits ne déclenchent pas l'instabilité.

2.2.4.4 Résultats

A l'aide de ces différentes études paramétriques, nous avons pu déterminer précisément les paramètres influents sur la stabilité des modes acoustiques dans notre modèle. Deux résultats majeurs en découlent :

- Dans les figures 2.6-2.8, on observe la présence d'une plage de T_{bump} privilégiée ($T_{\text{bump}} \in [1.8, 2.3]$) dans laquelle le mode acoustique fondamental est instable. Cette zone définit une bande d'instabilité *optimale* pour notre problème correspondant au concept de région de transition (voir Eq. 1.25).
- Une amplitude et une largeur minimales sont nécessaires pour obtenir des modes instables ($\mathcal{A} \simeq 45\%$ et $e_{\text{min}} \simeq 0.15$). On peut relier ce résultat à la condition énoncée dans l'équation (1.21) qui spécifie qu'une forme précise du profil de conductivité radiative est nécessaire pour déclencher l'instabilité. Enfin, la pente σ n'est pas un paramètre clé puisque la forme de la bande d'instabilité n'en dépend pas.

2.2.5 Intégrale de travail

En généralisant l'expression de l'intégrale de travail donnée en Eq. (1.13) aux cas non-adiabatiques, nous pouvons écrire

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} T_0(\theta + R) \frac{du_z^*}{dz} - g R u_z^* + \mathcal{D}_\nu u_z^* \right] \rho_0 dz}{\int_0^1 |u_z|^2 \rho_0 dz}. \quad (2.22)$$

Le détail du calcul de cette expression est donné dans [Gastine & Dintrans \(2008a\)](#). Le signe de la partie réelle τ ne dépend que du signe du numérateur. En traçant l'intégrand du numérateur, il est alors possible de déterminer quelles zones contribuent soit à l'amortissement, soit à l'excitation des modes.

L'intégrale de travail est le meilleur outil permettant de déterminer précisément la localisation de l'excitation (Fig. 2.9). La condition obtenue dans l'équation (1.21) spécifie que pour un trou d'une certaine taille (i.e. une amplitude et une largeur suffisantes) situé dans la région de transition, le mode fondamental est instable. Ce résultat a été partiellement confirmé lors des études paramétriques qui ont clairement fait apparaître la notion de bande d'instabilité. Détaillons maintenant les trois modes particuliers de cette figure :

- Le premier, tracé en pointillés bleus, correspond à une étoile « chaude » dans laquelle la zone d'ionisation est proche de la surface. Comme la densité dans cette zone est très faible, la valeur de la masse intégrée Δm est petite donc $\Psi \ll 1$ (voir la Fig. 2.9a). Dans Fig. 2.9b, nous avons également tracé un cas « témoin » en pointillés noirs dans lequel la conductivité radiative est constante : $K_0(T_0) = K_{\text{max}}$ et $dK_T/dz = 0$. On constate que le cas bleu est très proche de la situation à K constant : le profil de conductivité radiative a très peu d'influence sur la stabilité et la luminosité reste gelée. Le mode reste stable dans ce cas là.
- Dans le second cas, tracé en vert, la conductivité radiative commence à décroître dans une zone où $\Psi \simeq 1$, i.e. dans la région de transition (zone verte de Fig. 2.9a). En conséquence, l'excitation est très importante dans cette zone. De plus, la conductivité radiative augmente de nouveau dans une zone où la densité est déjà faible et où la luminosité est gelée : il n'y a alors pas de contribution négative à l'intégrale de travail. Dans l'ensemble, l'excitation l'emporte et le mode fondamental est instable.
- Le dernier cas, tracé en traits rouges, correspond à une étoile plus froide dans laquelle la zone d'ionisation est située plus en profondeur dans une région où $\Psi \gg 1$. Comme on le voit sur la figure Fig. 2.9b, on a toujours une contribution positive à l'intégrale de travail importante quand la conductivité radiative diminue. En revanche, quand la conductivité radiative augmente de nouveau dans le haut de la zone d'ionisation,

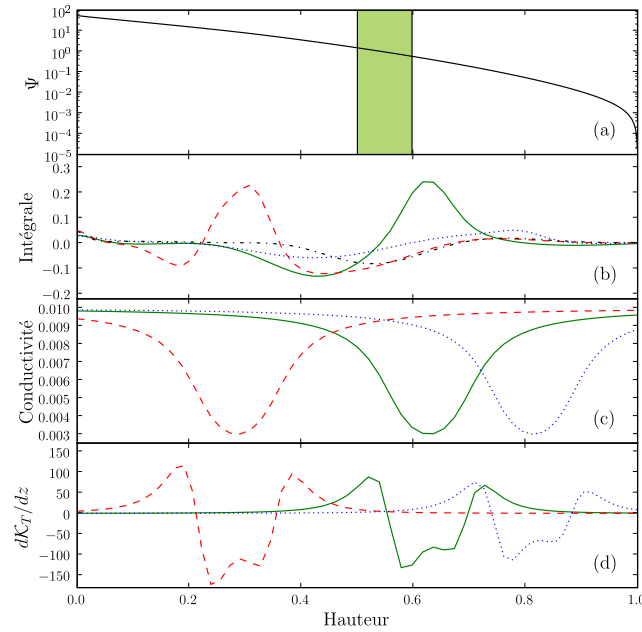


FIG. 2.9: **a)** Évolution du coefficient Ψ suivant la direction verticale en échelle logarithmique. La zone verte correspond à la région de transition où $\Psi \sim 1$. **b)** Partie réelle de l'intégrand du numérateur de l'intégrale de travail (2.22) tracée pour trois modèles d'équilibre. Un cas « témoin » avec conductivité radiative constante est tracé en pointillés noirs. **c)** Profils de conductivité radiative correspondants. **d)** Évolution du critère $d\mathcal{K}_T/dz$ suivant la direction verticale.

on a un amortissement fort qui compense l'excitation. Le mode fondamental reste stable dans ce cas là.

La figure 2.9 synthétise donc les deux conditions physiques nécessaires au κ -mécanisme : *(i)* il est nécessaire d'avoir $d\mathcal{K}_T/dz < 0$ pour entretenir des oscillations, mais cette condition est insuffisante puisque les trois cas de la figure 2.9 la satisfont ; *(ii)* le moteur thermique qui entretient les oscillations de l'étoile doit être situé ni trop près de la surface, ni trop en profondeur. Seule la situation où l'on a une superposition entre la région de transition et la zone d'ionisation permet d'obtenir un mode fondamental instable. Ce résultat est parfaitement illustré par les bandes d'instabilité obtenues dans les figures 2.6-2.8.

L'étude de la propagation d'ondes acoustiques dans un gaz parfait partiellement ionisé montre donc bien que l'on peut reproduire les conditions physiques du κ -mécanisme dans un modèle simplifié. Le profil de conductivité paramétrique est donc une modélisation satisfaisante de la zone d'ionisation.



Sommaire

3.1	La nécessité d'un solveur implicite	56
3.2	Cas avec conductivité radiative constante	57
3.2.1	Schéma de Crank-Nicolson	57
3.2.2	Schéma aux directions alternées (ADI)	57
3.2.3	Conditions aux limites	58
3.3	Cas avec conductivité radiative variable	59
3.3.1	Schéma aux directions alternées	59
3.3.2	Traitement de la non-linéarité	60
3.3.3	Conditions aux limites	61
3.4	Inclusion dans le Pencil Code	62
3.4.1	Cas avec conductivité radiative constante	62
3.4.2	Cas avec conductivité radiative variable	62
3.5	Résultats	63
3.5.1	Séries temporelles	63
3.5.2	Flux	64

LE complément du travail présenté dans le chapitre précédent est la réalisation de simulations non-linéaires correspondantes aux modèles les plus instables. L'étude du problème non-linéaire va permettre :

- de confirmer les taux de croissance obtenus lors de l'analyse de stabilité linéaire.
- d'atteindre la saturation non-linéaire et d'avoir ainsi une idée de l'amplitude finale des modes dans nos simulations.

Toutes les DNS ont été réalisées avec le Pencil Code (publié sous licence GPLv3 et librement téléchargeable à l'adresse suivante <http://pencil-code.googlecode.com/>). Il s'agit d'un code aux différences finies d'ordre élevé (6 en espace et 3 en temps). De plus, ce code est entièrement explicite, ce qui signifie que la solution physique à l'instant t^{n+1} dépend uniquement de la solution au temps précédent t^n . Le pas de temps dt entre deux temps successifs est alors limité par la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) qui repose sur les différents temps physiques de la simulation. Cette condition s'écrit

$$dt \leq \min \left(c_{\delta t} \frac{\delta z}{c_{s_{\max}}}, c_{\delta t \chi} \frac{\delta z^2}{\chi_{\max}}, c_{\delta t \nu} \frac{\delta z^2}{\nu_{\max}} \right), \quad (3.1)$$

où $c_{\delta t}$, $c_{\delta t \chi}$ et $c_{\delta t \nu}$ sont des coefficients constants qui dépendent de l'ordre du schéma spatial (voir §19.2 Press *et al.* 1992).

3.1 La nécessité d'un solveur implicite

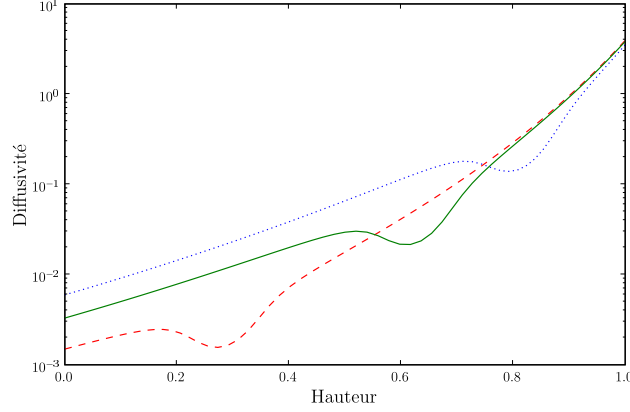


FIG. 3.1: Trois profils de diffusivité pour $T_{\text{bump}} = 1.7$ (pointillés bleus), $T_{\text{bump}} = 2.1$ (trait plein vert) et $T_{\text{bump}} = 2.8$ (tirets rouges).

Dans nos simulations, cette condition CFL (3.1) pose problème car les modèles instables correspondent à des situations où la diffusivité devient très grande en surface. Dans la figure 3.1, nous avons tracé les profils de diffusivité $\chi \equiv K/(\rho c_p)$ correspondants aux trois situations canoniques du chapitre précédent (i.e $T_{\text{bump}} = [1.7, 2.1, 2.8]$). Du fait du critère sur Ψ (Eq. 1.25), nos modèles ont systématiquement une densité ρ_{top} très faible, et donc des diffusivités $\chi_{\text{top}} \sim \mathcal{O}(1)$ en surface. Le temps lié à la diffusion radiative dans la CFL (3.1) est le plus petit et impose donc la contrainte la plus sévère au pas de temps global dt . A titre d'exemple, si l'on choisit une résolution spatiale typique de 256×256 et que la diffusion à la surface est $\mathcal{O}(1)$, alors avec $c_{\delta t \chi} = 0.4$ correspondant au schéma spatial du Pencil Code, le pas de temps est $\mathcal{O}(10^{-6})$. En comparaison, la dynamique de la couche est liée au pas de temps sonore $\delta z/c_{s_{\text{max}}} \simeq 3 \times 10^{-3}$. Il y a donc trois ordres de grandeur d'écart entre ces deux pas de temps.

Dès lors, il est impossible d'espérer atteindre la saturation non-linéaire aux temps longs d'un mode excité par κ -mécanisme avec un code entièrement explicite. La solution à ce problème lié à la petitesse de dt_{χ} repose sur la résolution *implicite* du terme de diffusion radiative, inconditionnellement stable, permettant de lever la CFL se rapportant au terme de diffusion radiative. On obtient alors pour ce nouveau schéma numérique :

$$dt \leq \min \left(c_{\delta t} \frac{\delta z}{c_{s_{\text{max}}}}, c_{\delta t \nu} \frac{\delta z^2}{\nu_{\text{max}}} \right), \quad (3.2)$$

qui donne un pas de temps $dt \sim \mathcal{O}(10^{-3})$ pour une résolution de 256×256 .

Tâchons maintenant d'expliquer le fonctionnement de ce solveur implicite. Nous ne raisonnerons dans un premier temps que sur le terme implicite avant de détailler par la suite comment nous l'intégrerons dans le code explicite. De manière schématique, l'équation que nous cherchons à résoudre implicitement est une équation de la chaleur à 2 dimensions du type :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} \left(K(T) \vec{\nabla} T \right). \quad (3.3)$$

Nous distinguerons par la suite le cas où la conductivité radiative $K(T)$ est constante du cas où elle est effectivement une fonction de la température.

3.2 Cas avec conductivité radiative constante

Dans ce premier cas, nous allons présenter la méthode aux directions alternées « classique ». Nous nous concentrerons donc sur le cas où la conductivité radiative est supposée constante ($K = \text{cst}$).

3.2.1 Schéma de Crank-Nicolson

L'équation (3.3) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = g, \quad (3.4)$$

où g désigne le second membre comprenant le terme de diffusion radiative. Effectuons le développement en série de Taylor de T au troisième ordre de précision :

$$T^{n+1} = T^n + dt \frac{\partial T^n}{\partial t} + \frac{dt^2}{2} \frac{\partial^2 T^n}{\partial t^2} + \mathcal{O}(dt^3). \quad (3.5)$$

Avec Eq. (3.4), on peut alors écrire

$$T^{n+1} = T^n + dt \cdot g^n + \frac{dt^2}{2} \frac{\partial g^n}{\partial t} + \mathcal{O}(dt^3). \quad (3.6)$$

On introduit le développement en série de Taylor de g au deuxième ordre de précision afin de calculer $\partial g^n / \partial t$ au premier ordre de précision :

$$T^{n+1} = T^n + dt \cdot g^n + \frac{dt}{2} (g^{n+1} - g^n) + \mathcal{O}(dt^3). \quad (3.7)$$

On en déduit alors le schéma de Crank-Nicolson (Crank & Nicolson 1943)

$$\boxed{\frac{T^{n+1} - T^n}{dt} = \frac{1}{2}(g^{n+1} + g^n) + \mathcal{O}(dt^2),} \quad (3.8)$$

qui est un schéma d'ordre 2 en temps inconditionnellement stable (voir Press *et al.* 1992, §19.3).

3.2.2 Schéma aux directions alternées (ADI)

On suppose maintenant que $g = \Lambda T$ où Λ est une somme d'opérateurs différentiels linéaires, généralement des opérateurs de dérivation par rapport à des variables spatiales différentes. Par exemple, dans un cas à deux dimensions, on introduit $\Lambda = \Lambda_x + \Lambda_z$ dans l'équation de Crank-Nicolson (3.8). On obtient

$$\left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_x - \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) T^{n+1} = \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_x + \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) T^n + \mathcal{O}(dt^3), \quad (3.9)$$

où I représente la matrice identité. En insérant de chaque côté de l'équation l'opérateur $\frac{dt^2}{4} \Lambda_x \Lambda_z$, on a

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_x - \frac{dt}{2} \Lambda_z + \frac{dt^2}{4} \Lambda_x \Lambda_z \right) T^{n+1} &= \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_x + \frac{dt}{2} \Lambda_z + \frac{dt^2}{4} \Lambda_x \Lambda_z \right) T^n \\ &\quad + \frac{dt^2}{4} \Lambda_x \Lambda_z (T^{n+1} - T^n) + \mathcal{O}(dt^3). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Or comme $T^{n+1} - T^n$ est $\mathcal{O}(dt)$, le dernier terme est $\mathcal{O}(dt^3)$, et passe donc dans l'erreur. L'expression précédente peut alors s'écrire

$$\left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_x \right) \left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) T^{n+1} = \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_x \right) \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) T^n + \mathcal{O}(dt^3). \quad (3.11)$$

Il existe alors plusieurs schémas permettant de résoudre cette équation.

3.2.2.1 Schéma de Peaceman-Rachford

Le plus célèbre d'entre eux est probablement le schéma de [Peaceman & Rachford \(1955\)](#) qui s'écrit (voir [Press et al. 1992](#), §19.3)

$$\begin{cases} \left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_x \right) T^{n+1/2} = \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) T^n, \\ \left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) T^{n+1} = \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_x \right) T^{n+1/2}. \end{cases} \quad (3.12)$$

En multipliant la première équation par $(I + \frac{dt}{2} \Lambda_x)$ et la deuxième par $(I - \frac{dt}{2} \Lambda_x)$, puis en sommant ces deux équations, on retrouve bien Eq. (3.11), ce qui garantit la précision du schéma à l'ordre 2 en temps.

3.2.2.2 Schéma de D'Yakonov

Un autre schéma couramment utilisé est le schéma de [D'Yakonov \(1964\)](#). Il s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_x \right) T^{n+1/2} = \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_x \right) T^n, \\ \left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) T^{n+1} = T^{n+1/2}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Comme le schéma de [Peaceman & Rachford](#), cet algorithme est consistant avec Eq. (3.11), du second ordre de précision en temps et stable sans condition.

Dans le cas où la conductivité radiative est constante, nous avons préféré utiliser le schéma de [Peaceman & Rachford](#).

3.2.3 Conditions aux limites

3.2.3.1 Condition de périodicité

Une condition de périodicité se traduit par l'apparition de coefficients non diagonaux :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_k & 0 & \cdots & a_k & b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \vdots \\ T_k^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{rhs}_1 \\ \text{rhs}_2 \\ \text{rhs}_3 \\ \vdots \\ \text{rhs}_k \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Ce type de matrice est appelée *matrice cyclique tridiagonale* (voir [Press et al. 1992](#), §2.7). Son inversion se base sur le théorème de Sherman-Morrison qui permet, connaissant l'inverse de A , de déterminer l'inverse de B si B n'a que quelques coefficients de différents par rapport à A . L'inversion d'une matrice cyclique nécessite $\mathcal{O}(2N)$ opérations (deux inversions successives de matrices tridiagonales).

3.2.3.2 Condition de Dirichlet

Une condition de Dirichlet, i.e. $T_1 = a(t)$, utilisée par exemple si l'on veut imposer une température constante, se traduit par un changement dans la première ligne de la matrice à inverser ($(I - \frac{dt}{2}\Lambda_x)$ ou $(I - \frac{dt}{2}\Lambda_z)$ suivant la direction suivant laquelle on souhaite imposer cette condition) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t^n) \\ \text{rhs}_2 \\ \text{rhs}_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

Si l'on travaille à l'ordre 2 en espace, cette condition aux limites nécessite simplement d'inverser une matrice tridiagonale.

3.2.3.3 Condition de von Neumann

Une condition de von Neumann, i.e. $(\frac{\partial T}{\partial x})_1 = b(t)$, utilisée par exemple si l'on souhaite imposer un flux constant, peut s'écrire à l'ordre 1¹ :

$$\frac{T_2 - T_1}{dx} = b(t). \quad (3.16)$$

Au niveau de l'inversion de la matrice, cela donne donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -dx \cdot b(t^n) \\ \text{rhs}_2 \\ \text{rhs}_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Là encore, à condition d'avoir une précision d'ordre 2 en espace, cette condition permet de n'inverser qu'une matrice tridiagonale.

3.3 Cas avec conductivité radiative variable

L'ADI classique à K constant n'est pas directement transposable dans le cas où cette conductivité radiative varie. Il est en effet nécessaire de traiter la non-linéarité $K = K(T)$. Plusieurs approches sont alors possibles, on pourra se rapporter à [Dendy \(1977\)](#), un des premiers à s'être intéressé à ce problème. Notons également quelques applications à des problèmes plus spécifiques de diffusion de [Masalkar \(1994\)](#); [Kosmidou & Tsiboukis \(2003\)](#) ou [Barash et al. \(2003\)](#).

3.3.1 Schéma aux directions alternées

Comme pour le Crank-Nicolson, nous pouvons écrire schématiquement,

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{dt} = \frac{\Lambda_x(T^{n+1}) + \Lambda_x(T^n)}{2} + \frac{\Lambda_z(T^{n+1}) + \Lambda_z(T^n)}{2}, \quad (3.18)$$

où Λ_x et Λ_z représentent des fonctions spatiales issues de la discrétisation de l'opérateur associé à la diffusion radiative. La discrétisation choisie est la suivante :

$$\text{div} \left(K(T) \vec{\nabla} T \right) = \Lambda_x(T) + \Lambda_z(T), \quad (3.19)$$

¹On peut montrer qu'une condition aux limites d'ordre $N - 1$ est compatible avec un schéma d'ordre N pour les points intérieurs. Le schéma restera donc d'ordre 2 en temps et d'ordre N en espace.

avec une discrétisation spatiale à l'ordre 2 telle que

$$\begin{cases} \Lambda_x(T_{i,j}) = \frac{1}{2dx^2} [(K_{i+1,j} + K_{i,j})(T_{i+1,j} - T_{i,j}) - (K_{i,j} + K_{i-1,j})(T_{i,j} - T_{i-1,j})], \\ \Lambda_z(T_{i,j}) = \frac{1}{2dz^2} [(K_{i,j+1} + K_{i,j})(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (K_{i,j} + K_{i,j-1})(T_{i,j} - T_{i,j-1})], \end{cases} \quad (3.20)$$

où l'on a noté par souci de clarté $K_{i,j}$ pour $K(T_{i,j})$. Cette discrétisation est fréquemment utilisée dans les problèmes de diffusion (e.g. [Press et al. 1992](#); [Malagoli et al. 1995](#))

3.3.2 Traitement de la non-linéarité

Il existe plusieurs méthodes permettant de traiter la non-linéarité, e.g. l'excellente référence [Witelski & Bowen \(2003\)](#). Pour notre part, nous avons décidé de traiter la non-linéarité contenue dans $K(T)$ en utilisant une méthode dite *semi-implicite* proche de la méthode de Rosenbrock, tout en gardant à l'esprit la notion de séparation d'opérateur (e.g. [Saarikoski et al. 1997](#)). L'idée principale est la suivante

$$\Lambda(T^{n+1}) = \Lambda(T^n) + \underbrace{\frac{\partial \Lambda}{\partial T^n}}_{\equiv J} (T^{n+1} - T^n). \quad (3.21)$$

où J désigne la matrice jacobienne de la fonction Λ . Appliquons cette approximation au schéma numérique (3.18), soit

$$\left(I - \frac{dt}{2}J_x - \frac{dt}{2}J_z\right) T^{n+1} = \left(I - \frac{dt}{2}J_x - \frac{dt}{2}J_z\right) T^n + dt[\Lambda_x(T^n) + \Lambda_z(T^n)], \quad (3.22)$$

où I désigne la matrice identité et J_x , J_z sont les matrices jacobienes associées à Λ_x , Λ_z . En arrangeant l'expression ci-dessus, on obtient

$$\underbrace{\left(I - \frac{dt}{2}J_x - \frac{dt}{2}J_z\right)}_{=A} (T^{n+1} - T^n) = dt[\Lambda_x(T^n) + \Lambda_z(T^n)]. \quad (3.23)$$

La résolution de cette équation nécessite l'inversion de la matrice A qui est de dimension $N^2 \times N^2$. Il est évidemment possible de calculer directement cette inversion par des méthodes itératives de type SOR ou gradient conjugué (e.g. [Press et al. 1992](#)). Néanmoins, la présentation de l'ADI réalisée dans le cas où $K(T)$ est constant nous a montré l'intérêt de la séparation d'opérateur. Nous allons donc procéder de même ici, afin d'inverser plutôt des matrices tridiagonales et/ou cycliques. En effet, nous pouvons séparer l'opérateur de la manière suivante :

$$A(T^{n+1} - T^n) = \left(I - \frac{dt}{2}J_x\right) \left(I - \frac{dt}{2}J_z\right) (T^{n+1} - T^n) - \underbrace{\frac{dt^2}{4}J_xJ_z(T^{n+1} - T^n)}_{\mathcal{O}(dt^3)}, \quad (3.24)$$

et le terme en $\mathcal{O}(dt^3)$ rentre dans l'erreur du schéma temporel. Dès lors, l'équation (3.23) peut être réécrite sous la forme

$$\boxed{\left(I - \frac{dt}{2}J_x\right) \left(I - \frac{dt}{2}J_z\right) (T^{n+1} - T^n) = dt[\Lambda_x(T^n) + \Lambda_z(T^n)].} \quad (3.25)$$

Nous pouvons facilement montrer que ce schéma est équivalent au schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(I - \frac{dt}{2} J_x \right) \alpha = \Lambda_x(T^n) + \Lambda_z(T^n), \\ \left(I - \frac{dt}{2} J_z \right) \beta = \alpha, \\ T^{n+1} = T^n + \beta dt. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Cette approche nous permet d'inverser, comme dans l'ADI, des matrices tridiagonales (ou cycliques suivant le type de conditions aux limites choisi) de dimension $(N \times N)$ et ainsi de gagner un temps de calcul important. Signalons que cette méthode donne évidemment les mêmes résultats que l'ADI dans le cas où $K(T)$ est constant (les matrices jacobienues J_x et J_z sont alors à coefficients constants) et conserve les propriétés de stabilité de cette même méthode.

3.3.3 Conditions aux limites

3.3.3.1 Condition de périodicité

Une condition de périodicité se traduit toujours par l'apparition de coefficients non diagonaux :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_k & 0 & \cdots & a_k & b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{n+1} - T_1^n \\ T_2^{n+1} - T_2^n \\ T_3^{n+1} - T_3^n \\ \vdots \\ T_k^{n+1} - T_k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{rhs}_1 \\ \text{rhs}_2 \\ \text{rhs}_3 \\ \vdots \\ \text{rhs}_k \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

et on obtient là encore une matrice cyclique nécessitant l'inversion de deux matrices tridiagonales.

3.3.3.2 Condition de Dirichlet

Pour une condition de Dirichlet, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{n+1} - T_1^n \\ T_2^{n+1} - T_2^n \\ T_3^{n+1} - T_3^n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t^n) - a(t^{n-1}) \\ \text{rhs}_2 \\ \text{rhs}_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Si l'on travaille à l'ordre 2 en espace, cette condition aux limites revient à inverser uniquement une matrice tridiagonale. Signalons également que, dans le cas où $a(t)$ est constant (par exemple si l'on impose une température), on obtient un zéro comme premier coefficient dans le membre de droite.

3.3.3.3 Condition de von Neumann

Une condition de von Neumann donne au niveau de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{n+1} - T_1^n \\ T_2^{n+1} - T_2^n \\ T_3^{n+1} - T_3^n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -dx[b(t^n) - b(t^{n-1})] \\ \text{rhs}_2 \\ \text{rhs}_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Là encore², à condition d'avoir une précision d'ordre 2 en espace, cela revient à n'inverser qu'une matrice tridiagonale.

3.4 Inclusion dans le Pencil Code

La résolution complète des équations de Navier-Stokes va se faire en plusieurs étapes. Dans un premier temps, on résout la *partie explicite (sans diffusion radiative)* par l'intermédiaire d'un intégrateur Runge-Kutta d'ordre 3 selon l'expression

$$f_{\text{expl}}^{n+1} = f_{\text{expl}}^n + dt \cdot \text{rhs}_{\text{expl}}^n. \quad (3.30)$$

Il faut maintenant résoudre la diffusion radiative via Eq. (3.26). Pour ce faire, nous allons ajouter le terme source suivant dans Eq. (3.26) qui traduira l'avancée de la partie explicite :

$$\mathcal{S} = \frac{T_{\text{expl}}^{n+1} - T_{\text{expl}}^n}{dt}. \quad (3.31)$$

3.4.1 Cas avec conductivité radiative constante

Sachant que l'on a décidé d'utiliser le schéma de Peaceman-Rachford (3.12) dans ce cas, le terme source sera inclus comme suit :

$$\begin{cases} \left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_x \right) T^{n+1/2} = \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) T^n + \frac{dt}{2} \mathcal{S}, \\ \left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) T^{n+1} = \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_x \right) T^{n+1/2} + \frac{dt}{2} \mathcal{S}. \end{cases} \quad (3.32)$$

En multipliant la première équation par $(I + \frac{dt}{2} \Lambda_x)$ et la deuxième par $(I - \frac{dt}{2} \Lambda_x)$, puis en sommant ces deux équations, on trouve l'équation suivante

$$\left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_x \right) \left(I - \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) T^{n+1} = \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_x \right) \left(I + \frac{dt}{2} \Lambda_z \right) T^n + dt \cdot \mathcal{S}, \quad (3.33)$$

correspondant à Eq. (3.11), augmentée du terme source lié à l'avancement explicite des termes non-radiatifs dans l'équation de la température.

3.4.2 Cas avec conductivité radiative variable

Il y a alors deux façons d'inclure le terme source dans le schéma (3.26) :

²Signalons que nous avons choisi de prendre $\text{rhs}_1 = 0$ ce qui nous évite de stocker T^{n-1} lors du calcul de T^{n+1} . Cette approximation ne reste bien entendue valable que si $b(t)$ ne varie pas trop entre deux itérations successives.

- Lors de la première étape en ajoutant le terme source dans le membre de droite, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(I - \frac{dt}{2} J_x \right) \alpha = \Lambda_x(T^n) + \Lambda_z(T^n) + \mathcal{S}, \\ \left(I - \frac{dt}{2} J_z \right) \beta = \alpha, \\ T^{n+1} = T^n + \beta \cdot dt. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

- Lors de la dernière étape en ajoutant le terme source avec β , soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(I - \frac{dt}{2} J_x \right) \alpha = \Lambda_x(T^n) + \Lambda_z(T^n), \\ \left(I - \frac{dt}{2} J_z \right) \beta = \alpha, \\ T^{n+1} = T^n + dt \cdot (\beta + \mathcal{S}). \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Ces deux solutions donnent des résultats assez similaires mais il nous a cependant semblé plus naturel de garder la première solution sachant que l'avancement explicite intervient alors dans l'inversion des matrices. Un autre argument en faveur du premier schéma est qu'il est le seul des deux qui permet de retrouver l'expression complète

$$\left(I - \frac{dt}{2} J_x \right) \left(I - \frac{dt}{2} J_z \right) (T^{n+1} - T^n) = dt[\Lambda_x(T^n) + \Lambda_z(T^n) + \mathcal{S}], \quad (3.36)$$

soit l'équation (3.25) augmentée du terme source.

Signalons que l'équation (3.3) est bien entendu une simplification d'écriture puisqu'elle ne prend pas en compte le terme en $\gamma/\rho c_v$ dans le membre de droite. Sachant que la densité ρ est avancée par le schéma explicite (3.30), nous avons choisi de prendre la densité *après* cet avancement explicite dans le terme $\gamma/\rho c_v$.

3.5 Résultats

Afin de vérifier la validité du schéma numérique proposé, nous avons étudié plusieurs cas tests. L'idée est de réaliser deux simulations numériques du même problème :

- une première simulation uniquement avec le solveur explicite du Pencil Code, i.e. à l'ordre 3 en temps et 6 en espace,
- une seconde simulation en utilisant la résolution implicite du terme de diffusion radiative via le schéma ADI.

Dans les deux cas, nous comparons des séries temporelles et des moyennes spatiales afin de visualiser les erreurs commises.

Nous présentons ici l'étude d'un polytrope convectif $m = 1$, avec une température au sommet du domaine $T_{\text{top}} = 1$ (Gough *et al.* 1976). Le rapport d'aspect L_x/L_z est égal à 4 et la résolution choisie est 128×128 . La viscosité cinématique ν et la conductivité radiative K sont constantes et valent $\nu = K = 10^{-3}$.

3.5.1 Séries temporelles

Dans un premier temps nous avons réalisé une comparaison des séries temporelles en traçant l'évolution de $u_{\text{RMS}} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ pour le cas purement explicite et le cas avec

ADI. Suivant la direction horizontale x , nous avons supposé des conditions aux limites de périodicité, alors que sont imposés suivant la direction verticale z des conditions *stress-free* pour la vitesse (i.e. $u_z = 0$ et $du_x/dz = 0$ aux deux extrémités du domaine). Concernant la température, cette simulation a été réalisée avec deux jeux de conditions aux limites différents :

- une simulation avec température fixée en haut et en bas du domaine correspondant à des conducteurs parfaits (Fig. 3.2a),
- une simulation avec température fixée en haut et flux en bas correspondant à un conducteur parfait en haut et un isolant parfait en bas (Fig. 3.2b).

Ces deux conditions aux limites permettent donc de tester la robustesse de l'ADI pour des conditions aux limites de Dirichlet (cf. §3.2.3.2) et de von Neumann (cf. §3.2.3.3).

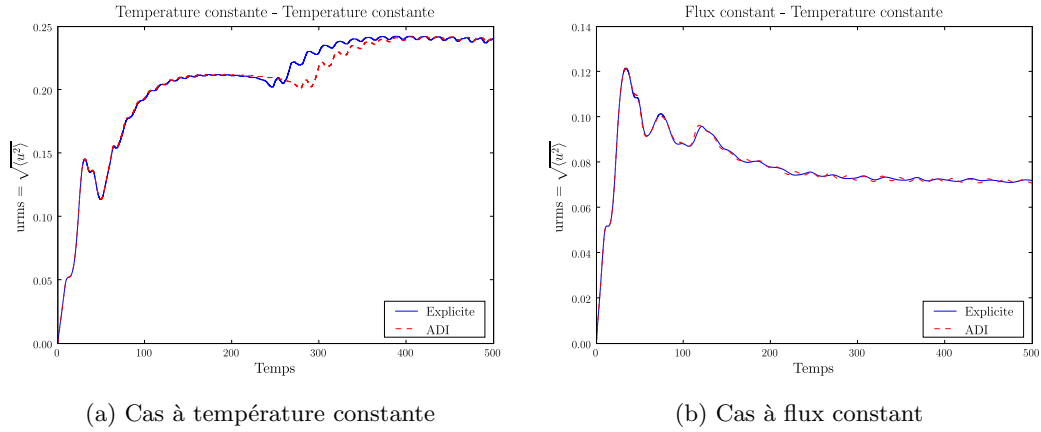


FIG. 3.2: Séries temporelles de $u_{RMS} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ pour un schéma purement explicite (trait plein bleu) et pour l'ADI (traits pointillés rouges). La figure (a) correspond à une simulation où la température est fixée en haut et en bas du domaine alors que la figure (b) correspond à une simulation où la température est fixée en haut et le flux en bas.

La figure 3.2 montre un excellent accord entre l'approche purement explicite (trait plein bleu) et l'approche avec ADI (traits en pointillés rouges) et ce, pour les deux types de conditions aux limites. La phase de croissance linéaire de l'instabilité convective aussi bien que la valeur de la saturation non-linéaire sont retrouvées avec une précision satisfaisante.

3.5.2 Flux

Il est également intéressant d'étudier les erreurs spatiales commises par le schéma aux directions alternées. Pour ce faire, nous avons ensuite comparé les profils verticaux moyens des flux radiatif, convectif et cinétique, définis par

$$\begin{cases} \mathcal{F}_r(z, t) = -K \nabla T, \\ \mathcal{F}_c(z, t) = \langle \rho \rangle c_p \langle T' u_z \rangle, \\ \mathcal{F}_t(z, t) = \frac{1}{2} \langle \rho \rangle \langle (u_x^2 + u_z^2) u_z \rangle, \end{cases} \quad (3.37)$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne horizontale et les quantités primées x' représentent les fluctuations de la quantité x par rapport à cette moyenne.

Pour les deux types de conditions aux limites, on obtient un excellent accord entre les deux méthodes numériques (Fig. 3.3). Dans la simulation où le flux est imposé en bas

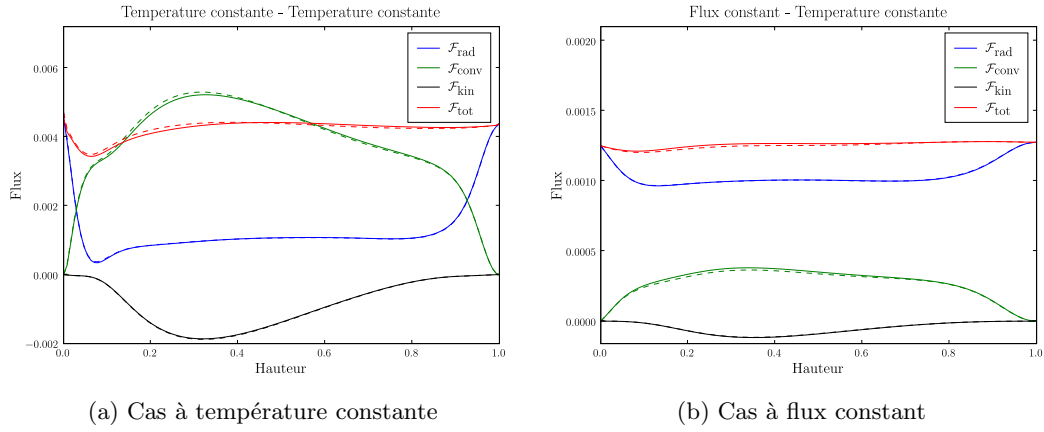


FIG. 3.3: Profils verticaux moyens des flux radiatif (bleu), convectif (vert), cinétique (noir) et total (rouge) pour une DNS utilisant uniquement le schéma explicite (traits pleins) et pour une DNS utilisant l'ADI (traits pointillés). La figure (a) correspond à une simulation où la température est fixée en haut et en bas du domaine alors que la figure (b) correspond à une simulation où la température est fixée en haut et le flux en bas.

du domaine, on constate que le flux total (traits rouges) est constant suivant la direction verticale ce qui indique que la simulation est bien relaxée thermiquement (Fig. 3.3b).



DNS et saturation non-linéaire

4

Sommaire

4.1	Simulations numériques directes	68
4.1.1	Accord temporel : taux de croissance	68
4.1.2	Accord spatial : profils verticaux	69
4.2	Le problème adjoint	71
4.2.1	Problématique	71
4.2.2	Choix des variables physiques	71
4.2.3	Équations aux oscillations	71
4.2.4	Conditions aux limites	73
4.3	Projection sur les modes propres adjoints	75
4.3.1	Calcul des coefficients $c_n(t)$	75
4.3.2	Évolution temporelle de l'amplitude des modes	76
4.3.3	Diagrammes de phases	76
4.3.4	Contenu énergétique des modes	77
4.4	Progression d'Hertzsprung	79
4.4.1	Les <i>bump</i> -Céphéides	79
4.4.2	Le mécanisme de résonance dans notre modèle	80

LE solveur implicite développé et validé sur des tests concrets (polytropes convectifs par exemple) dans le chapitre précédent va nous permettre de réaliser les simulations directes non-linéaires associées aux modèles instables trouvés lors de l'analyse de stabilité linéaire. Les modèles d'équilibre les plus instables par κ -mécanisme représentent les conditions initiales aux DNS. Les équations de Navier-Stokes sont ensuite avancées en temps jusqu'à atteindre la saturation non-linéaire.

Nous présenterons dans un premier temps les résultats de ces DNS avant de réaliser une étude complète de la saturation non-linéaire via une méthode de projection originale.

4.1 Simulations numériques directes

4.1.1 Accord temporel : taux de croissance

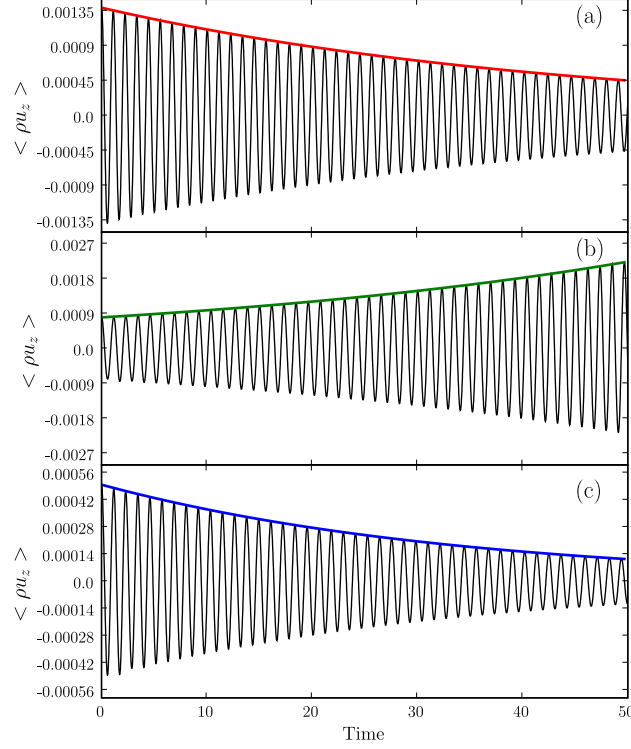


FIG. 4.1: Évolution temporelle du moment vertical moyen $\langle \rho u_z \rangle$ pour trois modèles de départ différents : **(a)** $T_{\text{bump}} = 2.8$ (ligne rouge), **(b)** $T_{\text{bump}} = 2.1$ (ligne verte) et **(c)** $T_{\text{bump}} = 1.7$ (ligne bleue). Dans chaque figure, nous avons superposé le taux de croissance issu de l'analyse de stabilité linéaire.

Un premier résultat intéressant peut être obtenu à l'aide des séries temporelles. La figure 4.1 représente l'évolution du moment vertical moyen $\langle \rho u_z \rangle$ (ou $\langle \cdot \cdot \cdot \rangle$ est une moyenne sur l'ensemble du domaine de la simulation) pour les trois cas d'étude présentés lors de l'analyse de stabilité linéaire (voir par exemple les figures 2.3 et 2.6).

- Le premier cas (Fig. 4.1a) correspond à une Céphéide « froide » dans laquelle la zone d'ionisation est située en profondeur. L'analyse de stabilité a montré que ce mode était stable. La DNS correspondante montre clairement une décroissance de $\langle \rho u_z \rangle$ qui confirme bien cette stabilité. De plus, le taux de décroissance donné par LSB (tracé en rouge sur la figure) correspond parfaitement à la décroissance observée dans la DNS (voir la table 4.1).
- Le deuxième cas (Fig. 4.1b) représente la situation où $\Psi \sim 1$ et le mode acoustique fondamental est excité par κ -mécanisme. Cette situation correspond à une Céphéide dans la bande d'instabilité. La DNS confirme la croissance du mode puisque l'amplitude de $\langle \rho u_z \rangle$ croît avec le temps. Là encore, on obtient un parfait accord entre le taux de croissance calculé par LSB et celui mesuré dans la phase linéaire de la DNS (i.e. aux temps courts).
- Le dernier cas (Fig. 4.1c) symbolise une étoile « chaude » dans laquelle la zone d'ionisation est proche de la surface. Dans ces conditions, l'amortissement l'emporte

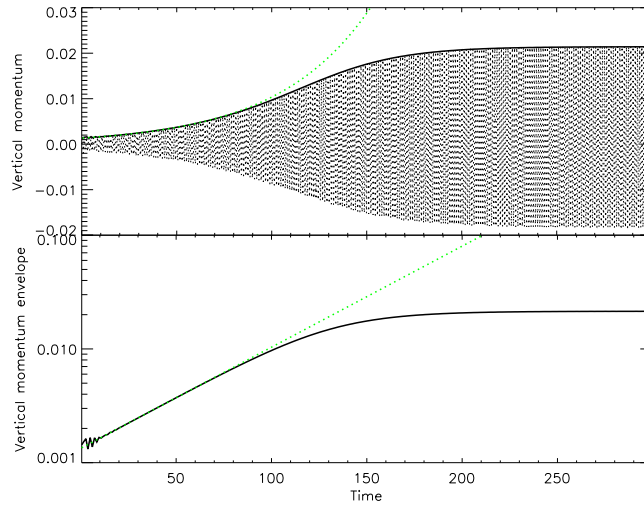


FIG. 4.2: *En haut* : évolution temporelle du moment vertical moyen $\langle \rho u_z \rangle$. Le résultat de l'analyse de stabilité linéaire (Fig. 2.4) est tracé en pointillés verts. *En bas* : évolution temporelle de l'enveloppe de $\langle \rho u_z \rangle$ tracée en coordonnées logarithmiques.

(Fig. 2.9) et la DNS confirme ce résultat puisque $\langle \rho u_z \rangle$ décroît (voir aussi la table 4.1).

	τ_{LSB}	τ_{DNS}	Err. rel.
Cas « rouge »	-2.2415×10^{-2}	-2.2412×10^{-2}	1.5551×10^{-4}
Cas « vert »	2.0484×10^{-2}	2.0516×10^{-2}	1.5286×10^{-3}
Cas « bleu »	-2.9382×10^{-2}	-2.9339×10^{-2}	1.4877×10^{-3}

TAB. 4.1: Taux de croissance correspondants aux trois modèles d'équilibre de la figure 2.3 calculés lors de l'analyse de stabilité linéaire et dans la DNS. L'erreur relative est donnée dans la troisième colonne.

La figure 4.2 est simplement la continuation de la DNS pour le modèle instable à $T_{\text{bump}} = 2.1$ (Fig. 4.1b), jusqu'à atteindre la saturation non-linéaire. La ligne en pointillés vert représente le taux de croissance théorique donné par LSB (i.e. $\tau = 2.0484 \times 10^{-2}$). Jusqu'à $t \simeq 80$, on note un parfait accord entre ce comportement linéaire et la DNS. Au-delà, la saturation non-linéaire se produit et $\langle \rho u_z \rangle$ tend vers une valeur précise de 2×10^{-2} pour $t \simeq 200$. Cet instant correspond grossièrement à 170 périodes du mode fondamental instable. Ce type d'ordre de grandeur est compatible avec le taux de croissance de l'instabilité qui correspond à un temps caractéristique d'environ $1/\tau \sim 100$.

4.1.2 Accord spatial : profils verticaux

L'excellent accord obtenu entre d'une part les taux de croissance donnés par l'analyse de stabilité linéaire et d'autre part les taux dérivés des DNS constitue une première validation de notre schéma aux directions alternées. Au-delà de cette accord temporel, il est également possible de vérifier la structure spatiale des modes se propageant dans nos simulations et de comparer cette structure aux différentes fonctions propres.

A partir d'un champ physique donné, typiquement le moment vertical $\rho u_z(x, z, t)$, nous réalisons une première transformée de Fourier en espace suivant la direction x . Du fait de

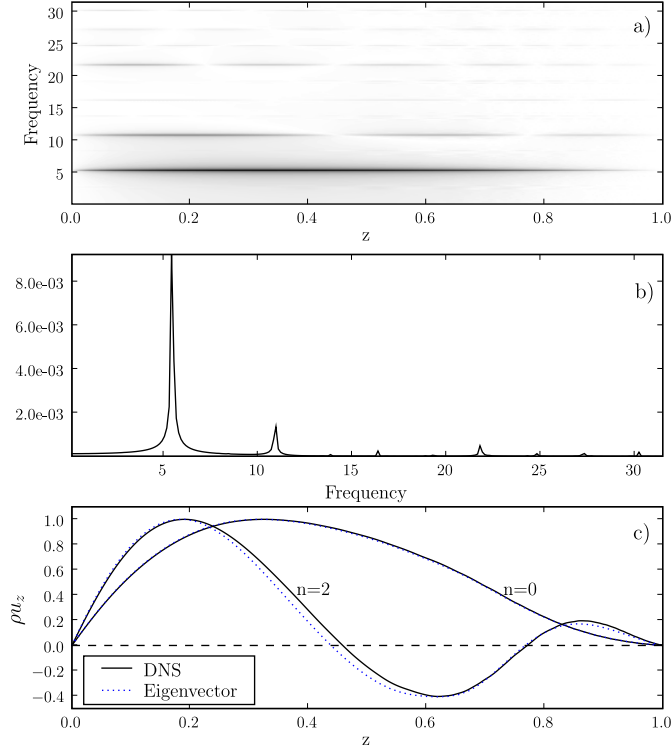


FIG. 4.3: **a)** Spectre en puissance pour le moment vertical ρu_z représenté dans le plan (z, ω) . **b)** Spectre résultant d'une intégration suivant la direction verticale z . **c)** Comparaison entre le moment vertical normalisé pour les modes $n = [0, 2]$ issus du spectre de la DNS (lignes noires en traits pleins) et les fonctions propres calculées avec l'analyse de stabilité linéaire (lignes en pointillés bleus).

la périodicité de notre domaine suivant la direction horizontale, le moment vertical devient une fonction discrète dans l'espace de Fourier $\widehat{\rho u_z}(\ell, z, t)$ où le degré ℓ du mode acoustique est défini par la relation suivante

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} \ell. \quad (4.1)$$

Dans un second temps nous réalisons une deuxième transformée de Fourier sur la variable temporelle qui conduit à $\widehat{\rho u_z}(\ell, z, \omega)$. Pour un nombre ℓ donné, on obtient donc un spectre de puissance que l'on peut représenter dans le plan (z, ω) . Cette méthode est utile puisqu'elle permet d'identifier très précisément les modes acoustiques ou les modes de gravité qui se propagent dans une simulation (Dintrans & Brandenburg 2004).

$$\rho u_z(x, z, t) \xrightarrow[\text{suivant } x]{\text{FFT}} \widehat{\rho u_z}(\ell, z, t) \xrightarrow[\text{suivant } t]{\text{FFT}} \widehat{\rho u_z}(\ell, z, \omega)$$

La figure 4.3 illustre un exemple d'utilisation de cette technique pour l'identification des modes acoustiques purement radiaux dans une DNS (i.e. pour $\ell = 0$). Les modes acoustiques apparaissent clairement dans le plan (z, ω) de la figure 4.3a autour de fréquences bien précises. Afin de déterminer la valeur de ces fréquences, on intègre $\widehat{\rho u_z}(z, \omega)$ suivant z pour obtenir le spectre d'oscillations. Dans la figure 4.3b, plusieurs pics correspondants aux valeurs propres apparaissent mais le mode fondamental proche de $\omega_{00} = 5.439$ domine clairement.

En fixant une valeur de fréquence particulière, il est possible à partir des résultats donnés dans la figure 4.3a de déterminer un profil vertical moyen autour de cette fréquence. Ce profil moyen autour d'une fréquence est ensuite comparé à la fonction propre

correspondante calculée par LSB. La figure 4.3c montre des profils verticaux autour de $\omega_{00} = 5.439$ et $\omega_{00} = 11.06$ (traits pleins noirs) et les fonctions propres des modes $n = 0$ et $n = 2$ (traits pointillés bleus). L'accord spatial entre les deux est excellent.

Comme les modes acoustiques d'ordre $n \geq 1$ sont tous linéairement stables, la figure 4.3 implique donc qu'un couplage non-linéaire entre modes s'accompagnant d'un transfert d'énergie doit avoir lieu. Afin d'étudier ces couplages, il est nécessaire de suivre l'évolution temporelle de chaque mode *séparément*.

4.2 Le problème adjoint

4.2.1 Problématique

Afin d'étudier précisément la saturation non-linéaire, nous avons développé une méthode de projection utilisée pour quantifier les émissions sonores dans des problèmes d'aéro-acoustique (Salwen & Grosch 1981; Wang *et al.* 2006), mais également dans un contexte astrophysique pour étudier la génération d'ondes sonores émises dans des simulations de convection compressible turbulente (Bogdan *et al.* 1993).

Comme illustré par la figure 3.1, la diffusivité en surface dans nos simulations atteint des valeurs qui sont $\mathcal{O}(1)$. Ces conditions de forte non-adiabaticité en surface nous ont été imposées par le critère découlant du concept de région de transition. Dans ce type de modèle, l'approximation quasi-adiabatique échoue et les effets dissipatifs ne peuvent plus être négligés. Ces termes de dissipation radiative et visqueuse ont pour conséquence de rendre les opérateurs *non-hermitiens*. Par exemple, la matrice A donnée dans Eq. (2.17) n'est pas auto-adjointe et ses vecteurs propres ψ_i ne sont pas mutuellement orthogonaux. Ces vecteurs ne peuvent donc être utilisés pour construire un sous-espace sur lequel on pourrait projeter les champs physiques de la DNS.

La solution est de construire le problème adjoint à celui étudié dans le chapitre précédent qui a pour propriété :

- d'avoir le même spectre que l'opérateur régulier.
- d'avoir des vecteurs propres orthogonaux aux vecteurs normaux correspondants du fait de la propriété dite de *biorthogonalité* (pour plus de détails, se référer à l'équation (B.14) donnée dans l'appendice B).

4.2.2 Choix des variables physiques

Les équations présentées précédemment sont celles données dans Gastine & Dintrans (2008a) augmentées de l'équation suivant u_x . Nous avons alors choisi d'utiliser $\theta \equiv T'/T_0$ comme variable. La condition aux limites qui en découle, notamment celle de flux, est relativement complexe (cf Eq. 2.19).

Par souci de simplification dans le calcul de la matrice adjointe et des conditions aux limites du problème adjoint, nous avons choisi de changer de variable et de travailler directement avec la fluctuation de température T' .

4.2.3 Équations aux oscillations

Le système (2.11) peut directement être réécrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda T' = \frac{\gamma}{\rho_0} \left[K_0 \left(-k_x^2 T' + \frac{d^2 T'}{dz^2} \right) + 2 \frac{dK_0}{dz} \frac{dT'}{dz} + \frac{d^2 K_0}{dz^2} T' \right] \\ \quad - (\gamma - 1) T_0 \left(ik_x u_x + \frac{du_z}{dz} \right) + \frac{F_{\text{bot}}}{K_0} u_z, \\ \\ \lambda u_x = -R^* ik_x (T' + T_0 R) \\ \quad + \nu \left[\frac{d^2 u_x}{dz^2} + \frac{d \ln \rho_0}{dz} \left(\frac{du_x}{dz} + ik_x u_z \right) + \frac{1}{3} ik_x \frac{du_z}{dz} - \frac{4}{3} k_x^2 u_x \right], \\ \\ \lambda u_z = -R^* \left(\frac{dT'}{dz} + \frac{d \ln \rho_0}{dz} T' + T_0 \frac{dR}{dz} \right) \\ \quad + \nu \left[\frac{4}{3} \frac{d^2 u_z}{dz^2} + \frac{d \ln \rho_0}{dz} \left(\frac{4}{3} \frac{du_z}{dz} - \frac{2}{3} ik_x u_x \right) - k_x^2 u_z + \frac{1}{3} ik_x \frac{du_x}{dz} \right], \\ \\ \lambda R = -ik_x u_x - \frac{du_z}{dz} - \frac{d \ln \rho_0}{dz} u_z, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où $R^* \equiv (\gamma - 1)/\gamma$ avec l'adimensionnement présenté dans le chapitre précédent. La matrice A associée à ce système d'équations peut alors s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} (1) & -(\gamma - 1)T_0 ik_x & -(\gamma - 1)T_0 D + \frac{F_{\text{bot}}}{K_0} & 0 \\ -R^* ik_x & \nu(D^2 + D \ln \rho_0 D - \frac{4}{3}k_x^2) & \frac{\nu}{3} ik_x (D + 3D \ln \rho_0) & -R^* T_0 ik_x \\ -R^* (D \ln \rho_0 + D) & \frac{\nu}{3} ik_x (D - 2D \ln \rho_0) & \frac{4\nu}{3} (D^2 + D \ln \rho_0 D - \frac{3}{4}k_x^2) & -R^* T_0 D \\ 0 & -ik_x & -(D + D \ln \rho_0) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

où

$$(1) = \frac{\gamma}{\rho_0} [K_0(-k_x^2 + D^2) + 2DK_0 D + D^2 K_0]. \quad (4.4)$$

La matrice adjointe A^\dagger va être construite à partir de la définition de la matrice adjointe

$$\langle \vec{\psi}_2, A \vec{\psi}_1 \rangle = \langle A^\dagger \vec{\psi}_2, \vec{\psi}_1 \rangle, \quad (4.5)$$

et de propriétés dérivées dans l'appendice B. Le paragraphe B.4 détaille précisément terme par terme le calcul de cette matrice adjointe. Tous calculs faits, elle s'écrit de la manière suivante

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} (1) & R^* ik_x & R^* (D - D \ln \rho_0) & 0 \\ (\gamma - 1)T_0 ik_x & \nu [D^2 - \frac{4}{3}k_x^2 - 3(D \ln \rho_0 D + D^2 \ln \rho_0)] & \frac{\nu}{3} ik_x (D + 2D \ln \rho_0) & ik_x \\ (\gamma - 1)T_0 D + (2 - \gamma) \frac{F_{\text{bot}}}{K_0} & \frac{\nu}{3} ik_x (D - 3D \ln \rho_0) & \frac{\nu}{3} [4D^2 - 3k_x^2 - 4(D \ln \rho_0 D + D^2 \ln \rho_0)] & D - D \ln \rho_0 \\ 0 & R^* ik_x T_0 & R^* (T_0 D + D T_0) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

avec

$$(1) = \frac{\gamma K_0}{\rho_0} \left\{ D^2 - 2D \ln \rho_0 D + [-k_x^2 - D^2 \ln \rho_0 + (D \ln \rho_0)^2] \right\}. \quad (4.7)$$

Cette matrice adjointe nous permet alors d'établir les équations aux valeurs propres du problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda T' = \frac{\gamma K_0}{\rho_0} \left\{ \frac{d^2 T'}{dz^2} - 2 \frac{d \ln \rho_0}{dz} \frac{dT'}{dz} + \left[-k_x^2 - \frac{d^2 \ln \rho_0}{dz^2} + \left(\frac{d \ln \rho_0}{dz} \right)^2 \right] T' \right\} \\ \quad + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(ik_x u_x + \frac{du_z}{dz} - \frac{d \ln \rho_0}{dz} u_z \right), \\ \\ \lambda u_x = (\gamma - 1) T_0 ik_x T' + ik_x R + \nu \left[\frac{d^2 u_x}{dz^2} - \frac{d \ln \rho_0}{dz} \frac{du_x}{dz} \right. \\ \quad \left. - \left(\frac{4}{3} k_x^2 + \frac{d^2 \ln \rho_0}{dz^2} \right) u_x + ik_x \left(\frac{1}{3} \frac{du_z}{dz} + \frac{2}{3} \frac{d \ln \rho_0}{dz} u_z \right) \right], \\ \\ \lambda u_z = (\gamma - 1) T_0 \frac{dT'}{dz} + (2 - \gamma) \frac{F_{\text{bot}}}{K_0} T' + \frac{dR}{dz} - \frac{d \ln \rho_0}{dz} R + \nu \left[\frac{4}{3} \frac{d^2 u_z}{dz^2} \right. \\ \quad \left. - \frac{4}{3} \frac{d \ln \rho_0}{dz} \frac{du_z}{dz} - \left(k_x^2 + \frac{4}{3} \frac{d^2 \ln \rho_0}{dz^2} \right) u_z + ik_x \left(\frac{1}{3} \frac{du_x}{dz} - \frac{d \ln \rho_0}{dz} u_x \right) \right], \\ \\ \lambda R = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(ik_x T_0 u_x + T_0 \frac{du_z}{dz} - \frac{F_{\text{bot}}}{K_0} u_z \right), \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Pour réaliser l'analyse de stabilité du problème adjoint, il reste encore à déterminer les conditions aux limites associées.

4.2.4 Conditions aux limites

Le calcul détaillé des différents termes de la matrice adjointe (4.6) montre que certains termes intégrés ne disparaissent pas (voir l'appendice B.4 pour le calcul complet). Ces différents termes doivent être annulés pour que le problème (4.8) soit bien le problème adjoint au problème régulier (4.2). Ils fournissent donc le jeu de conditions aux limites du problème adjoint (e.g. [Bohlius et al. 2007](#)).

4.2.4.1 Conditions sur la température

L'équation (B.20) fournit les conditions sur la température. En effet, pour éliminer les termes intégrés, nous pouvons écrire

$$(1) + (2) = \left[\frac{T_2'^* K_0}{\rho_0} \frac{dT_1'}{dz} \right]_0^1 - \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{T_2'^* K_0}{\rho_0} \right) T_1' \right]_0^1 + 2 \left[\frac{T_2'^*}{\rho_0} \frac{dK_0}{dz} T_1' \right]_0^1 = 0. \quad (4.9)$$

Dans le problème régulier, les conditions aux limites s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_1'}{dz} = 0 \quad \text{en } z = 0, \\ T_1' = 0 \quad \text{en } z = 1. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Donc Eq. (4.9) donne deux conditions distinctes :

– En $z = 1$

$$\frac{T_2'^* K_0}{\rho_0} \frac{dT_1'}{dz} = 0 \iff \boxed{T_2' = 0 \quad \text{en} \quad z = 1.} \quad (4.11)$$

– En $z = 0$

$$\left[2 \frac{T_2'^*}{\rho_0} \frac{dK_0}{dz} - \frac{d}{dz} \left(\frac{T_2'^* K_0}{\rho_0} \right) \right] T_1' = 0. \quad (4.12)$$

Cette équation peut alors se ramener à l'expression suivante

$$\boxed{K_0 \frac{dT_2'}{dz} - \left(\frac{dK_0}{dz} + K_0 \frac{d \ln \rho_0}{dz} \right) T_2' = 0 \quad \text{en} \quad z = 0.} \quad (4.13)$$

4.2.4.2 Conditions sur u_x

L'équation (B.37) fournit la condition aux limites pour u_{x_2} , soit

$$\left[-\frac{du_{x_2}^*}{dz} u_{x_1} \right]_0^1 + \left[u_{x_2}^* \frac{d \ln \rho_0}{dz} u_{x_1} \right]_0^1 = 0. \quad (4.14)$$

et nous pouvons directement en déduire les conditions aux limites suivantes :

$$\boxed{\frac{du_{x_2}}{dz} - \frac{d \ln \rho_0}{dz} u_{x_2} = 0 \quad \text{en} \quad z = [0, 1].} \quad (4.15)$$

4.2.4.3 Conditions sur u_z

L'équation (B.52) fournit la condition aux limites sur u_{z_2} . Le résultat est immédiat puisqu'il suffit de prendre, comme dans le problème régulier, une condition de mur aux deux bords de la boîte soit

$$\boxed{u_{z_2} = 0 \quad \text{en} \quad z = [0, 1].} \quad (4.16)$$

Par ailleurs, avec cette condition aux limites, les termes intégrés restant dans les équations (B.30, B.40) et (B.63) s'annulent bien.

Avec ce jeu de conditions aux limites, tous les termes intégrés disparaissent et le système considéré est bel et bien le problème adjoint au système initial. Tous les éléments sont donc réunis pour résoudre le problème

$$A^\dagger \vec{\phi} = \mu \vec{\phi}, \quad (4.17)$$

qui est un problème aux valeurs propres généralisé. Comme la propriété de biorthogonalité nous assure un spectre identique entre le problème régulier et le problème adjoint, seuls les vecteurs propres différeront.

La figure 4.4 illustre un exemple de vecteur propre adjoint comparé au vecteur propre régulier. Par souci de lisibilité, les vecteurs ont été normalisés. Il s'agit ici du mode acoustique fondamental ($\ell = 0$, $n = 0$) obtenus avec LSB dans les deux problèmes (régulier et adjoint).

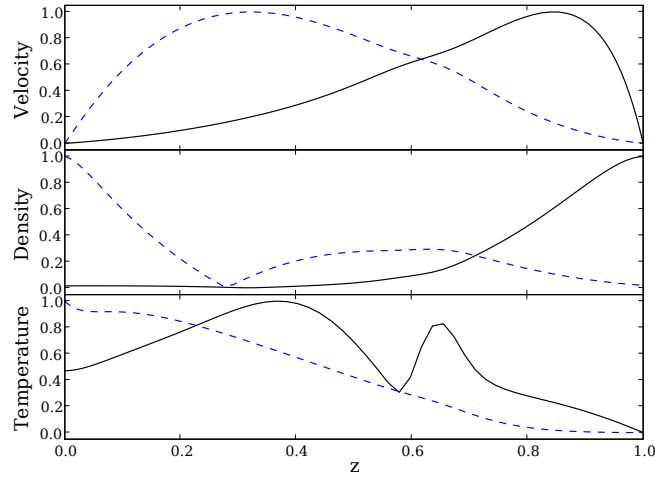


FIG. 4.4: Parties réelles normalisées des fonctions propres (u_z , R , T') pour le mode acoustique fondamental dans le problème régulier (trait noir) et adjoint (trait pointillé bleu).

4.3 Projection sur les modes propres adjoints

4.3.1 Calcul des coefficients $c_n(t)$

Dans la partie précédente, nous avons détaillé le calcul des vecteurs propres adjoints. De manière générale, avec Eq. (B.14), nous pouvons écrire après normalisation de ces vecteurs

$$\langle \vec{\phi}_i, \vec{\psi}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (4.18)$$

où $\vec{\phi}_i$ indique le i -ème vecteur propre adjoint et $\vec{\psi}_j$ le j -ième vecteur propres régulier. Les champs physiques de la DNS (vitesse, température, densité) peuvent alors être projetés sur les vecteurs propres de la manière suivante (Bogdan *et al.* 1993) :

$$\vec{\zeta}_{\text{DNS}} = (T'_{\text{DNS}} \quad u_{z\text{DNS}} \quad R_{\text{DNS}}) = \Re \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\langle \vec{\phi}_n, \vec{\zeta}_{\text{DNS}} \rangle}_{c_n(t)} \vec{\psi}_n \right\}. \quad (4.19)$$

où $c_n(t)$ est calculé en utilisant les vecteurs propres *adjoints*

$$c_n(t) = \langle \vec{\phi}_n, \vec{\zeta}_{\text{DNS}} \rangle = \int_0^1 \vec{\phi}_n^* \cdot \vec{\zeta}_{\text{DNS}} dz. \quad (4.20)$$

La fonction complexe $c_n(t)$ définit l'évolution temporelle de l'amplitude du mode acoustique d'ordre n . En effet, cette grandeur peut s'écrire sous la forme

$$c_n(t) = |c_n(t)| \exp(i\varphi_n(t)), \quad (4.21)$$

où la phase $\varphi_n(t)$ contient la fréquence propre ω_n du mode acoustique d'ordre radial n selon l'expression

$$\varphi_n(t) \propto \omega_n t. \quad (4.22)$$

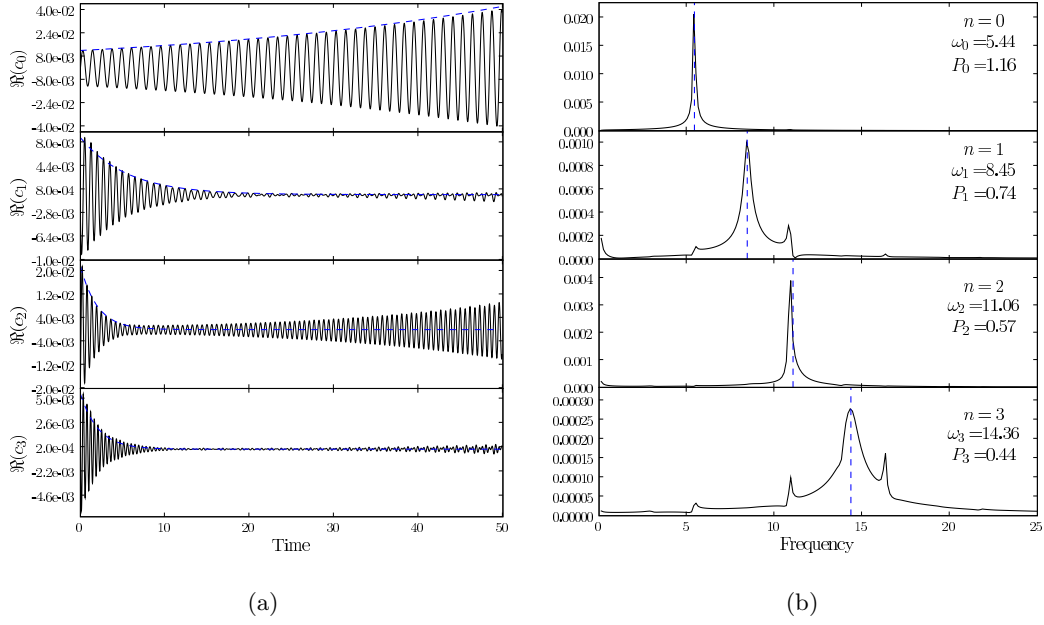


FIG. 4.5: **a)** Évolution temporelle de la partie réelle de l'amplitude des modes $c_n(t)$ pour $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Les taux de croissance (ou de décroissance) des modes sont superposés en pointillés bleus. **b)** les transformées de Fourier associées aux $c_n(t)$. Les fréquences propres sont indiquées par des lignes verticales bleues.

4.3.2 Évolution temporelle de l'amplitude des modes

La figure 4.5a montre l'évolution temporelle de la partie réelle des coefficients de projection $c_n(t)$ pour les quatre premiers modes acoustiques $n \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$. Sur la même figure, on a également superposé les courbes $\propto \exp \tau_n t$ issues de l'analyse de stabilité linéaire. Comme attendu, seul le mode fondamental croît dès le début de la simulation numérique avec un taux de croissance correspondant à celui donné par LSB. Pour les autres modes excepté le $n = 2$, les amplitudes sont monotones décroissantes. Concernant le mode d'ordre 2, son amplitude décroît bien dans un premier temps jusqu'à $t \simeq 10$, suivant le taux de décroissance de LSB, puis dans un second temps commence à augmenter. Ce comportement indique que des couplages non-linéaires ont lieu entre ce mode et le mode fondamental instable.

Nous avons également réalisé les transformées de Fourier des coefficients de projection $c_n(t)$ pour s'assurer que l'on retrouvait bien les fréquences propres comme indiqué dans Eqs. (4.21-4.22). Sur la figure 4.5b, on a représenté les valeurs propres des modes par des traits bleus verticaux. On note bien un très bon accord entre les maxima de $\hat{c}_n(t)$ et les fréquences propres, soit $\varphi_n(t) \propto \omega t$.

4.3.3 Diagrammes de phases

Les coefficients de projection $c_n(t)$ présentés précédemment permettent également de construire des diagrammes de phase qui donnent l'évolution temporelle d'un mode particulier. Pour chaque figure de 4.6, on a tracé la partie imaginaire $\Im\{c_n(t)\}$ en fonction de la partie réelle $\Re\{c_n(t)\}$ pour les quatre modes propres étudiés dans la figure 4.5a. Pour garder une bonne lisibilité au niveau des graphiques, nous avons tracé ces diagrammes de phase jusqu'à $t = 50$. Les orbites décroissantes sont tracées en noir et celles croissantes sont en bleu. Dans ce type de graphe, le rayon des trajectoires est égal au module de l'amplitude $c_n(t)$: un rayon qui augmente est associé à un mode instable, un rayon décroissant

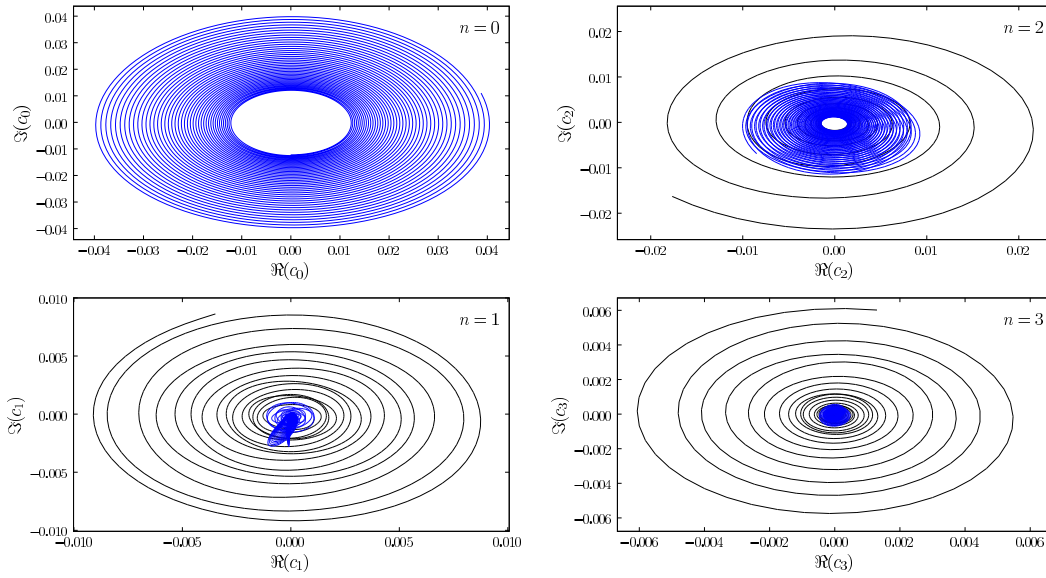


FIG. 4.6: Diagrammes de phase pour les modes $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. L'abscisse correspond à $\Re\{c_n(t)\}$ et l'ordonnée à $\Im\{c_n(t)\}$. Les orbites croissantes sont tracées en bleu, les décroissantes en noir.

à un mode stable.

Là encore, seul le mode fondamental a une croissance monotone continue. Notons que l'excitation par κ -mécanisme est un phénomène physique cohérent au sens où aucune discontinuité n'est observée dans le diagramme de phase du mode fondamental. Pour le mode $n = 2$, on note d'abord une décroissance transitoire de l'amplitude du mode avant une augmentation importante du rayon de l'orbite caractéristique du couplage non-linéaire avec le mode fondamental. Pour les deux autres modes $n = 1$ et $n = 3$, on note une croissance marginale pour les dernières orbites.

4.3.4 Contenu énergétique des modes

4.3.4.1 Formalisme

Notre méthode de projection permet également d'estimer le contenu énergétique de chaque mode. Dans les simulations de [Bogdan et al. \(1993\)](#), la quantité totale d'énergie cinétique contenue dans les modes acoustiques était de l'ordre de 0.2%, le reste étant principalement contenu dans les mouvements convectifs. Comme nous nous intéressons à des modèles purement radiatifs, le champ de vitesse est *entièrement* dû aux modes acoustiques. Nous pouvons donc écrire l'égalité suivante

$$E_{\text{kin}}^{\text{tot}} = E_{\text{modes}} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \quad (4.23)$$

où E_n est l'énergie contenue dans le mode acoustique d'ordre n . Les calculs développés dans [Gastine & Dintrans \(2008b\)](#) montrent que E_n s'écrit à partir des coefficients de projection et des fonctions propres u_{z_n} comme

$$E_n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_0^1 \rho_0 \Re[c_n(t)u_{z_n}] \Re[c_p(t)u_{z_p}] dz. \quad (4.24)$$

4.3.4.2 Résultats : une résonance 2 : 1

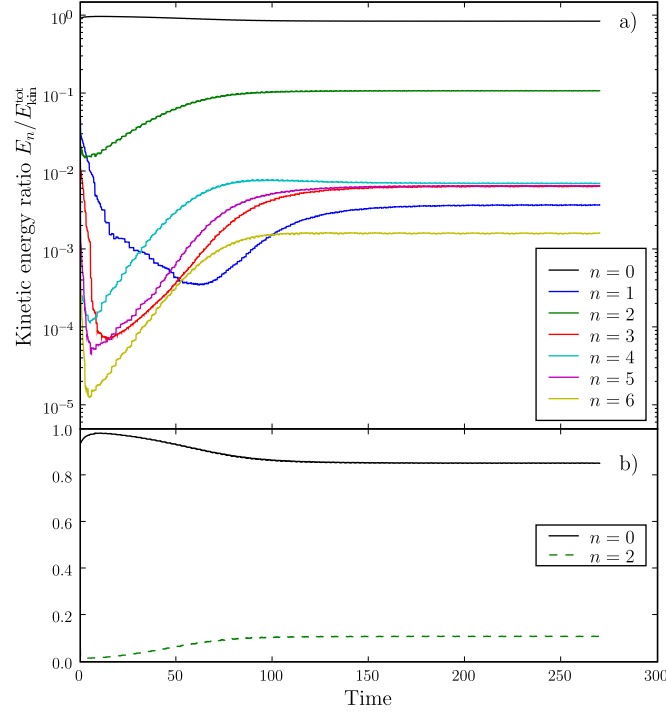


FIG. 4.7: **a)** Ratios d'énergie cinétique pour $n \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$ en échelle logarithmique. **b)** Zoom sur les modes $n = 0$ (ligne noire en traits pleins) et $n = 2$ (traits pointillés verts).

La figure 4.7a montre l'évolution temporelle du rapport $E_n/E_{\text{kin}}^{\text{tot}}$ pour les modes $n \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$ jusqu'à la saturation non-linéaire. Après la croissance transitoire du mode fondamental, une fraction de l'énergie totale est transférée aux modes d'ordre $n \geq 1$ linéairement stables. La saturation non-linéaire est atteinte pour $t \simeq 150$. Les couplages non-linéaires ont principalement lieu entre le mode fondamental $n = 0$ et le mode $n = 2$ car leurs ratios d'énergie dominent nettement. Les autres modes contribuent également au phénomène de saturation mais le ratio d'énergie contenu dans les modes $n \in \llbracket 1, 3 - 6 \rrbracket$ est de l'ordre de quelques %. Ce résultat est compatible avec l'amplitude des pics observés dans l'espace de Fourier (Fig. 4.3) et la croissance marginale de l'orbite des modes $n = 1$ et $n = 3$ dans les diagrammes de phase (Fig. 4.6). Ce résultat n'est pas étonnant pour les modes d'ordre élevé qui ont des petites échelles et donc des taux d'amortissement élevés.

Le fait que le mode $n = 2$ ait beaucoup plus d'énergie que le mode $n = 1$ est en contradiction avec une explication purement basée sur leurs taux d'amortissement, le taux d'amortissement du mode $n = 2$ étant le double du mode $n = 1$ (Tab. 2.1). La figure 4.7b représente un zoom sur le mode fondamental et le mode d'ordre 2. Le transfert d'énergie le plus important a bel et bien lieu entre ces deux modes qui contiennent plus de 98% de l'énergie cinétique totale. La raison principale expliquant ce couplage privilégié réside dans le rapport des deux périodes propres P_2/P_0 . En effet, la période du mode fondamental est $P_0 = 2\pi/\omega_0 \simeq 1.155$ alors que la période du mode d'ordre 2 est $P_2 \simeq 0.568$, de sorte que le rapport des deux est très proche de $1/2$ ($P_2/P_0 \simeq 0.491$). Le mode $n = 2$ reçoit donc de l'énergie du mode fondamental toutes les deux périodes et cela correspond à une résonance de type 2 : 1. La croissance du mode propre fondamental est donc compensée par le puits d'énergie constitué par le mode $n = 2$ linéairement stable. Les ratios d'énergie finaux, une fois la saturation non-linéaire atteinte, atteignent environ 87% pour le mode fondamental

et 11% pour le $n = 2$.

4.4 Progression d'Hertzsprung

4.4.1 Les *bump*-Céphéides

Une saturation non-linéaire où une résonance de type 2 : 1 intervient est un résultat intéressant puisque c'est précisément ce mécanisme qui est invoqué pour expliquer l'apparition d'un « bump » secondaire dans les courbes de lumière de certaines Céphéides appelées pour cela les « *bump*-Céphéides ». De plus, la position de ce bump par rapport aux maxima de la courbe de luminosité est corrélée à la période d'oscillation de l'étoile. Ce phénomène porte le nom de *progression d'Hertzsprung* (Hertzsprung 1926; Payne-Gaposchkin 1954).

Le bump apparaît d'abord dans la partie descendante des courbes de lumière des Céphéides ayant des périodes de 6-7 jours, puis remonte vers le maximum qu'il atteint pour des périodes de 10-11 jours. Pour des Céphéides de plus longues périodes, le bump est sur la partie ascendante de la courbe de luminosité et finit par disparaître pour des périodes supérieures à 20 jours (Tsvetkov 1990; Whitney 1983; Bono *et al.* 2000). Une illustration de la progression d'Hertzsprung est donnée dans la figure 4.8 pour différents modèles de Céphéides de masse $M = 7.15 M_{\odot}$, de luminosité $\log L/L_{\odot} = 3.69$ et de température effective T_{eff} variable.

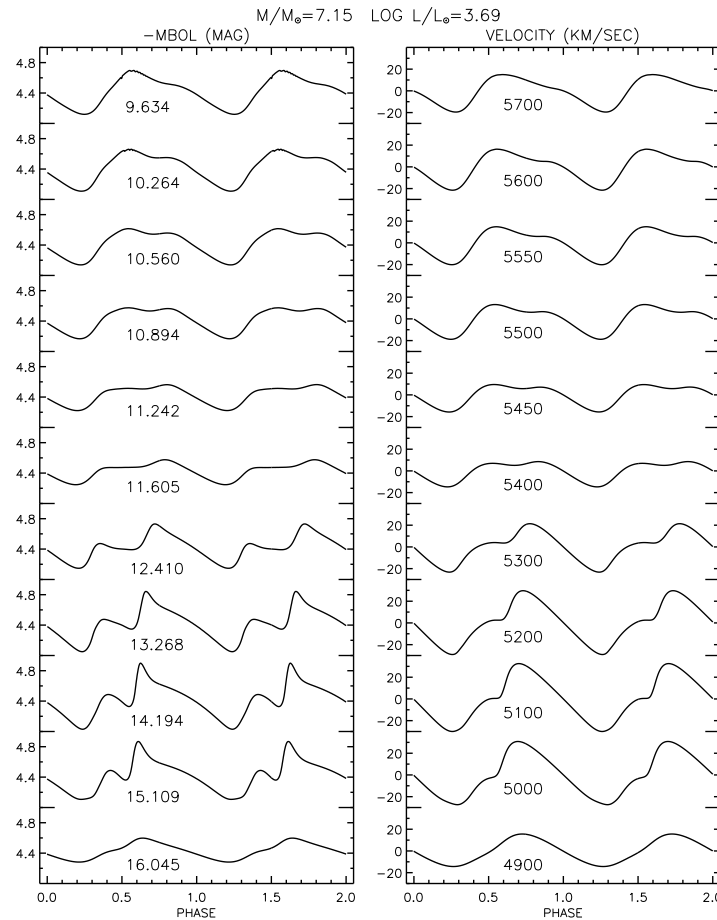


FIG. 4.8: Courbes de luminosité (gauche) et de vitesse radiale (droite) pour différents modèles de Céphéides de masse $M = 7.15 M_{\odot}$ de luminosité $\log L/L_{\odot} = 3.69$ (Bono *et al.* 2000). Les périodes (gauche) et les températures effectives (droite) des différents modèles sont indiquées au-dessus des courbes.

Deux mécanismes physiques principaux ont été invoqués pour expliquer ce phénomène de progression d'Hertzsprung :

- Whitney (1956) a suggéré un *mécanisme d'écho* que Christy (1968) a ensuite développé plus en détails. Dans ce modèle, deux paquets d'ondes acoustiques radiales (appelés parfois les ondes de Christy) se déplaçant dans des directions opposées sont générées dans la région de deuxième ionisation de l'Helium (HeII) pendant la phase de compression. L'onde allant vers l'intérieur se réfléchit sur le cœur de l'étoile et atteint la surface pendant la période suivante générant ainsi le bump.
- La seconde explication, connue sous le nom de *mécanisme de résonance*, a été proposée par Simon & Schmidt (1976). Dans cette hypothèse, le bump est dû à une résonance entre le mode acoustique fondamental et le mode $n = 2$. Ce mécanisme est possible si et seulement si le rapport P_2/P_0 est proche de $1/2$.

Trois articles successifs de Whitney (1983) et Aikawa & Whitney (1984-1985) ont comparé les deux approches. L'idée principale était de considérer les deux mécanismes comme deux représentations complémentaires d'un même phénomène physique. En dépit de résultats prometteurs obtenus dans des polytropes (Whitney 1983), le formalisme de rayons utilisé n'a pas été capable de reproduire les ondes de Christy. La majeure partie de l'énergie est contenue dans des ondes stationnaires plutôt que dans des ondes progressives (Aikawa & Whitney 1984, 1985).

Le mécanisme de résonance a également été étudié par l'intermédiaire du formalisme des équations d'amplitude (Buchler & Goupil 1984; Klapp *et al.* 1985). Ils ont constaté des variations caractéristiques de la phase et de l'amplitude des modes avec le rapport P_2/P_0 (voir également Simon & Lee 1981; Kovacs & Buchler 1989; Buchler *et al.* 1990). Notons que ce genre d'étude doit être mené avec le rapport des périodes *propres* et ne peut être obtenu par les observations. En effet, du fait du couplage non-linéaire, les périodes observées sont exactement telles que $P_2/P_0 = 0.5$; en conséquence il n'y a aucun lien entre la position du bump secondaire et ce rapport des périodes *observées*. Seules les périodes issues du spectre d'oscillations sont pertinentes pour ce genre de résultats. De plus, Buchler *et al.* (1990) ont montré que les corrélations fortes entre la phase et le rapport P_2/P_0 n'étaient pas reproduites quand ils traçaient les résultats en fonction de P_0 uniquement. Mais en dépit de ces résultats en faveur du mécanisme de résonance, la controverse entre les deux approches reste d'actualité (Fadeyev & Muthsam 1992; Bono *et al.* 2000, 2002).

4.4.2 Le mécanisme de résonance dans notre modèle

Il est intéressant de voir si nos simulations du κ -mécanisme où une résonance de type 2 : 1 participe à la saturation non-linéaire reproduisent elles aussi le phénomène physique de progression d'Hertzsprung.

Pour répondre à cette question, nous avons dans un premier temps tracé les lignes de niveaux de P_2/P_0 sur la bande d'instabilité de l'étude paramétrique $\mathcal{A} - T_{\text{bump}}$ (Fig. 4.9). Les lignes en traits pleins correspondent aux zones où $P_2/P_0 > 1/2$ et celles en tirets à $P_2/P_0 < 1/2$. La ligne rouge correspond à la ligne critique où $P_2/P_0 = 0.5$. On constate donc que la bande d'instabilité est séparée en deux zones du point de vue du rapport P_2/P_0 . En réalisant les DNS correspondantes à ces modèles d'équilibre, nous sommes capables de vérifier le lien éventuel entre le bump du profil de luminosité et P_2/P_0 . Comme nous nous concentrons ici sur les modes radiaux uniquement et que nous réalisons des simulations 1-D, la luminosité est égale au flux radiatif émergeant au sommet de la boîte :

$$L(t) = F_{\text{top}}(t). \quad (4.25)$$

Ce que l'on appellera par la suite *courbe de luminosité* correspond donc dans nos modèles au flux radiatif émergeant. De fait de la condition au limite que l'on impose au sommet

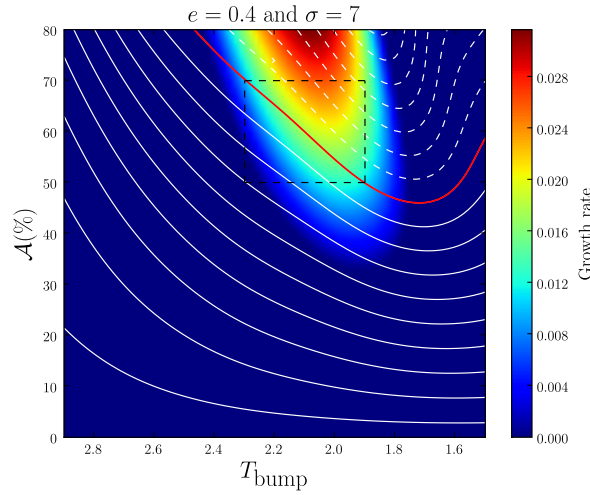


FIG. 4.9: Les lignes de niveaux de P_2/P_0 sont superposées à la bande d'instabilité $\mathcal{A}-T_{\text{bump}}$ de la figure 2.6. Les lignes en tirets blancs correspondent à $P_2/P_0 < 1/2$ et celles en trait plein à $P_2/P_0 > 1/2$. La ligne rouge correspond à $P_2/P_0 = 0.5$. La boîte en pointillés noirs correspond à l'espace des paramètres recouvert par les 400 DNS réalisées pour étudier la progression d'Hertzsprung.

du domaine (i.e. température fixée), $F_{\text{top}}(t)$ va osciller autour de la valeur moyenne F_{bot} qui est le flux imposé en bas du domaine.

Nous avons ainsi réalisé 400 DNS dans la bande d'instabilité pour couvrir des valeurs de T_{bump} et \mathcal{A} autour de la ligne critique $P_2/P_0 = 1/2$. Le domaine couvert est représenté par la boîte en tirets noirs sur la figure 4.9. Dans chaque cas, la simulation a été prolongée jusqu'à atteindre la saturation non-linéaire ($t_{\text{max}} = 100$). On a ensuite réalisé un fit de la courbe de luminosité $F_{\text{top}}(t)$ sur la fonction suivante :

$$f(t) = F_{\text{bot}} + A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \phi_2), \quad (4.26)$$

où les paramètres $[A_0, A_2, \phi_0, \phi_2]$ sont obtenus par un algorithme de moindres carrés non-linéaire (e.g. Press *et al.* 1992, chap. 15.5). Cette fonction ne fait intervenir que le mode fondamental et le mode d'ordre 2 qui représentent plus de 98% de l'énergie cinétique (voir Fig. 4.7). Le déphasage entre les deux signaux est défini par

$$\Delta\phi = \phi_2 - 2\phi_0. \quad (4.27)$$

Cette grandeur est importante puisqu'elle permet de déterminer la position du bump secondaire par rapport aux maxima de la courbe de luminosité. Si $\Delta\phi < \pi$, le bump secondaire est situé dans la branche descendante de la courbe de luminosité, c'est à dire après le maximum. A l'inverse, si $\Delta\phi > \pi$, il est dans la partie ascendante (i.e. avant le maximum).

L'ensemble des résultats obtenus est synthétisé dans la figure 4.10. On a représenté des iso-contours en $\Delta\phi$ dans le plan $(T_{\text{bump}}, \mathcal{A})$. Les régions en rouge sont associées à $\Delta\phi > \pi$, les régions bleues à $\Delta\phi < \pi$ et la zone blanche à $\Delta\phi = \pi$. Sur la figure 4.10, les lignes de niveaux en P_2/P_0 ont également été tracées. Les correspondances suivantes apparaissent :

$$\begin{aligned} \Delta\phi < \pi \quad (\text{bump après le maximum}) &\Leftrightarrow P_2/P_0 > 1/2, \\ \Delta\phi > \pi \quad (\text{bump avant le maximum}) &\Leftrightarrow P_2/P_0 < 1/2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

ce qui reproduit bien la corrélation donnée par Simon & Schmidt (1976).

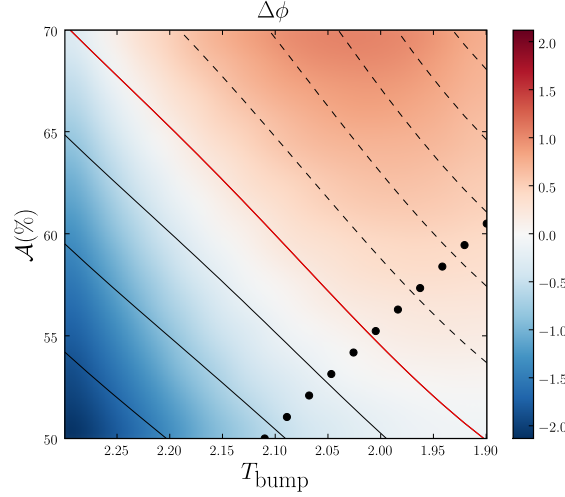


FIG. 4.10: Iso-contours de $\Delta\phi - \pi$ dans le plan $(T_{\text{bump}}, \mathcal{A})$. Cette figure correspond à l'espace des paramètres délimité par la boîte en pointillés noirs de la figure 4.9. Les cercles noirs représentent les onze courbes de lumière sélectionnées dans la figure 4.11.

Pour illustrer ce résultat, nous avons représenté sur la figure 4.11 une série de courbes de luminosité afin de reproduire le phénomène de progression d'Hertzsprung. Les onze courbes correspondent aux petits disques noirs de la figure 4.10 distribués des deux côtés de la ligne critique $P_2/P_0 = 1/2$. Les correspondances données dans Eq. (4.28) apparaissent clairement puisque le bump est dans la partie descendante pour $P_2/P_0 > 1/2$ et dans la partie montante pour $P_2/P_0 < 1/2$.

Notre modèle est donc capable de reproduire qualitativement le phénomène de progression d'Hertzsprung puisque la position du bump secondaire évolue bien de la manière attendue avec la valeur du rapport des périodes P_2/P_0 . La résonance 2 : 1 impliquée dans la saturation non-linéaire de nos modèles purement radiatifs a donc une signature « observationnelle » via l'apparition d'un bump secondaire dans la courbe de luminosité dont la position est liée à P_2/P_0 .



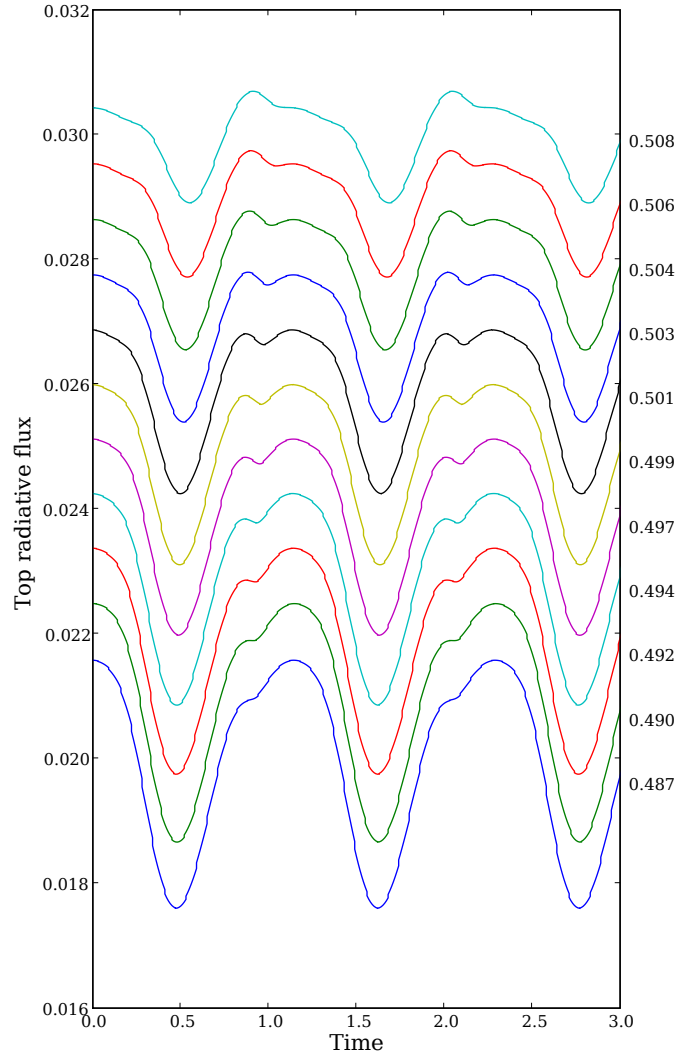


FIG. 4.11: Évolution temporelle du flux radiatif de surface à $t = 500$ pour les onze simulations représentées par des cercles noirs dans la figure 4.10. Les rapports P_2/P_0 correspondants sont indiqués à droite de la figure.

Sommaire

5.1	Difficultés numériques	86
5.1.1	Modélisation	86
5.1.2	Stabilité numérique et chocs ?	87
5.2	Simulations numériques	88
5.2.1	Cadre de travail	88
5.2.2	Séries temporelles	88
5.2.3	Domaine spectral	89
5.2.4	Phénomène de synchronisation	91
5.3	Contenus énergétiques	91
5.3.1	Présentation de la méthode	91
5.3.2	Résultats	93
5.3.3	Phénomène de synchronisation	94
5.3.4	Bilan	94
5.4	Études paramétriques	95
5.4.1	Influence du nombre de Rayleigh	95
5.4.2	Synchronisation et temps de retournement	96
5.5	Évolution des flux et MLT dépendante du temps	98
5.5.1	Flux dans les DNS	98
5.5.2	DNS et longueur de mélange dépendante du temps	100

La dernière partie de mon travail a porté sur l'étude de modèles où la convection et les pulsations sont couplées. Comme nous allons le voir, la transition entre les situations purement radiatives présentées dans les chapitres précédents et des modèles convectifs a soulevé de nombreuses difficultés (particulièrement sur le plan numérique). Je détaillerai dans un premier temps la méthode adoptée pour construire des modèles réalisables numériquement, avant de présenter les résultats obtenus.

5.1 Difficultés numériques

5.1.1 Modélisation

L'idée de départ a été de considérer le modèle utilisé précédemment dans les cas uniquement radiatifs et de modifier leur structure pour faire apparaître localement une zone convective. En effet, d'après le critère de Schwarzschild énoncé en Eq. (2.8), la condition pour avoir une zone convective s'écrit

$$\frac{F_{\text{bot}}}{K(T)} > g, \quad (5.1)$$

qui devient

$$K(T) < \frac{F_{\text{bot}}}{g}. \quad (5.2)$$

Cette condition signifie que si la valeur de la conductivité radiative devient suffisamment faible, alors l'apparition d'une zone convective devient possible. La figure 5.1 illustre ce résultat. Des traits pointillés indiquent la valeur de F_{bot}/g , alors que le profil de conductivité radiative $K(T)$ est représenté par un trait bleu. Au niveau de la zone d'ionisation, le trou de conductivité radiative dépasse la valeur limite entraînant le déclenchement de la convection (cercles rouges sur la figure). Néanmoins, nous allons voir que la transposition depuis les modèles radiatifs n'est pas immédiate.

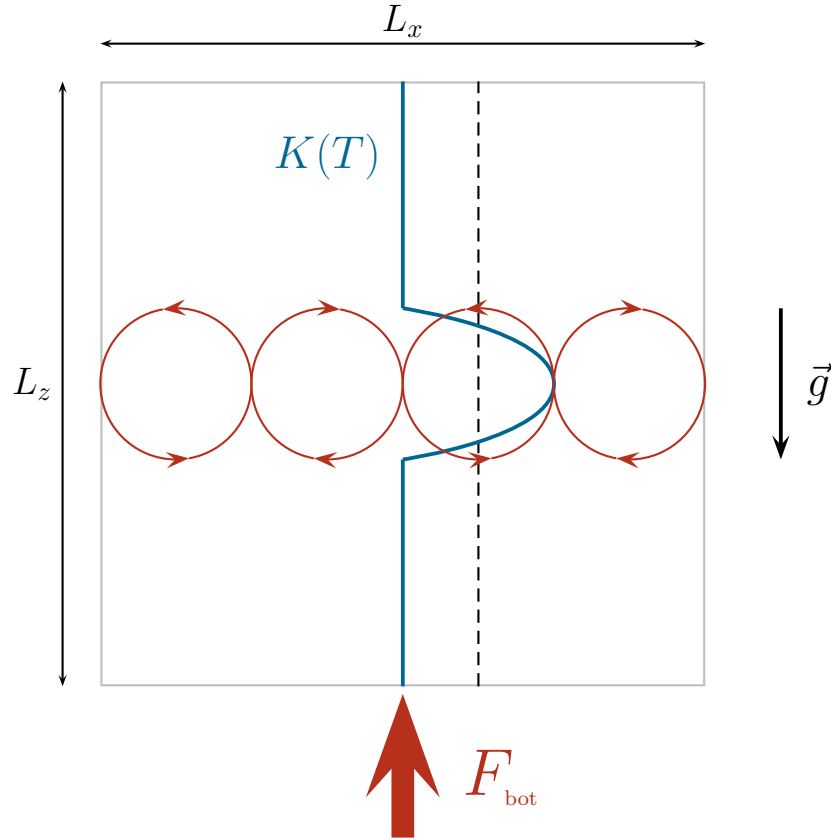


FIG. 5.1: Description schématique de notre modèle : la courbe bleue représente le profil de température $K(T)$, les traits pointillés désignent la limite de Schwarzschild (5.2) et la flèche rouge indique le flux F_{bot} imposé en bas de la boîte.

5.1.2 Stabilité numérique et chocs ?

Les modèles étudiés dans [Gastine & Dintrans \(2008a,b\)](#) reposent tous sur des densités très faibles en surface (cf Fig. 3.1). La valeur typique retenue est $\rho_{\text{top}} = 2.5 \times 10^{-3}$. Concernant le flux radiatif, la valeur utilisée est $F_{\text{bot}} = 2 \times 10^{-2}$. La théorie de la longueur de mélange (voir Appendice A.2) permet de relier la valeur du flux convectif à une vitesse caractéristique convective u si l'on suppose que tout le flux est transporté par la convection, soit

$$F_{\text{bot}} \sim \rho u^3 \quad \text{d'où} \quad u \sim \left(\frac{F_{\text{bot}}}{\rho} \right)^{1/3}. \quad (5.3)$$

La vitesse du son c_s s'écrit quant à elle

$$c_s = \sqrt{(\gamma - 1)T}. \quad (5.4)$$

En supposant $T \sim T_{\text{top}} \sim 1$, on obtient pour le nombre de Mach

$$\text{Ma} \equiv \frac{u}{c_s} \sim 2.5. \quad (5.5)$$

Cette valeur de $\text{Ma} > 1$ montre clairement que les simulations associées à ce type de modèle d'équilibre conduisent à l'apparition de nombreux chocs. Face à ce problème, deux solutions principales existent :

Utiliser une viscosité de chocs : le Pencil Code a un système de viscosité de chocs implémenté permettant d'étudier des écoulements à nombre de Mach élevé. Par exemple, on peut utiliser l'expression suivante

$$\zeta_{\text{chocs}} = c_{\text{chocs}} \left\langle \max_5 [(-\text{div } \vec{u})] \right\rangle [\min(\delta x, \delta y, \delta z)]^2, \quad (5.6)$$

où c_{chocs} est une constante indiquant l'importance de la viscosité de chocs. Le coefficient 5 indique qu'il s'agit d'une valeur maximale sur 5 zones. Cette approche a l'inconvénient principal d'aller à l'encontre de notre motivation principale pour ce travail : garder un modèle suffisamment simple pour contrôler autant que faire se peut la physique à l'origine du κ -mécanisme. Il est clair qu'il est loin d'être évident de quantifier les effets de la viscosité de chocs sur la physique du couplage convection-pulsations, et ce particulièrement pour des coefficients c_{chocs} élevés.

Jouer sur l'espace des paramètres : l'autre approche consiste à modifier significativement les paramètres fondamentaux du modèle (ρ_{top} , F_{bot} et g) pour obtenir des nombres de Mach traitables numériquement sans utiliser de viscosité de chocs.

Afin de garder un maximum de maîtrise sur la physique de nos simulations, nous avons opté pour la seconde approche. L'inconvénient de ce choix est qu'il n'a pas été possible de réaliser des simulations en partant des modèles radiatifs (i.e. par exemple en changeant simplement la valeur de l'amplitude du trou \mathcal{A} pour faire apparaître une zone convective).

Dans un premier temps, nous avons choisi d'augmenter significativement la vitesse du son c_s afin de réduire Ma . Pour ce faire, nous avons doublé la température de surface pour avoir $T_{\text{top}} = 2$. Afin de garder des valeurs du coefficient Ψ proches de 1 au milieu de la boîte, nous avons également adapté la densité de surface pour avoir $\rho_{\text{top}} = 10^{-2}$ et augmenté l'extension verticale du domaine pour atteindre $L_z = 2$. Enfin, plutôt que d'augmenter la valeur de \mathcal{A} pour obtenir une zone convective, nous avons joué sur les deux paramètres clés F_{bot} et g .

Dans la grande majorité des simulations que nous allons présenter, la valeur de F_{bot} a été doublée par rapport aux modèles radiatifs (une valeur typique est $F_{\text{bot}} = 4 \times 10^{-2}$), alors que la gravité reste proche des valeurs utilisées précédemment, i.e. $g \in [6, 8]$ au lieu de $g = 7$.

5.2 Simulations numériques

5.2.1 Cadre de travail

Les simulations numériques directes réalisées ont des résolutions typiques de 256×256 . Il est relativement difficile d'envisager des simulations avec des résolutions supérieures tant pour des raisons de temps de calcul (rappelons que notre solveur implicite n'est pas parallélisé) que pour des raisons de stockage (il est nécessaire d'échantillonner souvent en temps pour étudier les modes acoustiques¹). Toutes nos simulations ont été poursuivies jusqu'à atteindre au moins $t = 3000$. Sachant que la fréquence propre du mode acoustique fondamental excité par κ -mécanisme est désormais $\omega_{00} \simeq 3$ avec ces nouveaux modèles d'équilibre, la période propre est $P_{00} \simeq 2$. Les simulations réalisées recouvrent donc au moins 1500 périodes d'oscillations du mode fondamental instable.

Au travers des DNS réalisées, nous avons cherché à couvrir différents régimes de paramètres (via les paramètres F_{bot} et g , mais également la viscosité ν) ainsi que différents rapports d'aspect en faisant varier les dimensions de notre boîte. Il faut néanmoins garder à l'esprit que les critères d'excitation des modes par κ -mécanisme (Eqs. 1.21 et 1.25), enrichis des contraintes numériques supplémentaires présentées en §5.1, ne nous laissent que peu de latitude pour réaliser une étude paramétrique exhaustive. C'est pourquoi on ne trouvera pas dans la suite des variations trop importantes de ces paramètres entre les simulations.

5.2.2 Séries temporelles

Un premier résultat intéressant peut être obtenu simplement à l'aide des séries temporelles. Dans une simulation où les modes acoustiques sont stables et où la vitesse u_z est uniquement due aux mouvements convectifs, la grandeur $\langle \rho u_z \rangle$ tend rapidement vers 0 (en moyenne les mouvements montants et descendants se compensent dans la zone convective). En revanche, dans le cadre de la convection oscillante, les modes apportent leur propre contribution à la vitesse verticale. La grandeur $\langle \rho u_z \rangle$ est alors un traceur permettant de filtrer les mouvements convectifs et d'étudier ainsi l'amplitude des modes acoustiques présents dans la simulation.

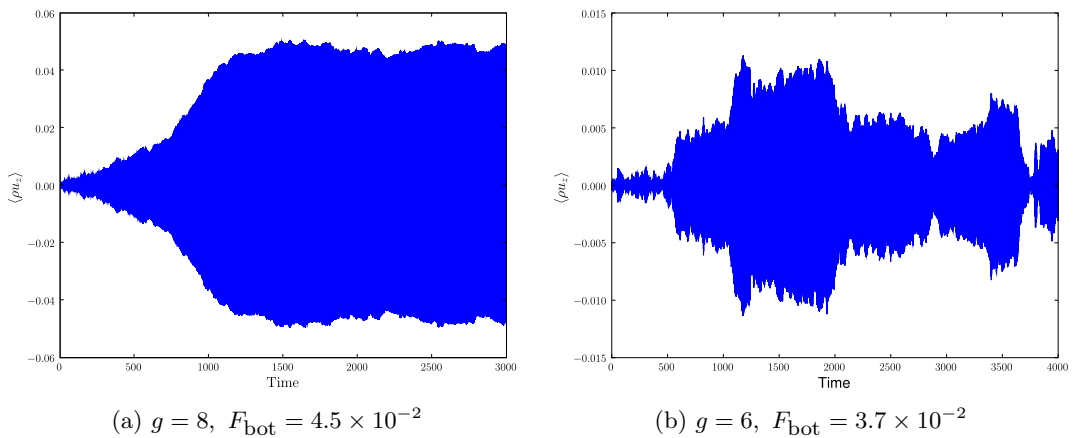


FIG. 5.2: Évolution temporelle du moment vertical moyen $\langle \rho u_z \rangle$ dans la simulation G8 (a), et dans la simulation G6 (b).

La figure 5.2a illustre l'évolution temporelle de $\langle \rho u_z \rangle$. Au vu de l'échantillonnage temporel (plus de 1500 périodes sont couvertes), on ne visualise pas sur cette figure l'oscil-

¹A titre d'exemple, une simulation 256×256 poursuivie jusqu'à atteindre $t = 3000$ représente un volume de stockage de 40 Go.

Nom	Gravité	F_{bot}	L_x
G6	$g = 6$	$F_{\text{bot}} = 3.7 \times 10^{-2}$	$L_x = 8$
G7	$g = 7$	$F_{\text{bot}} = 4 \times 10^{-2}$	$L_x = 8$
G8	$g = 8$	$F_{\text{bot}} = 4.5 \times 10^{-2}$	$L_x = 8$

TAB. 5.1: Noms et paramètres principaux des simulations présentées dans ce chapitre.

lation du moment vertical. Nous pouvons cependant constater que dans cette simulation, la grandeur augmente de manière relativement continue pour atteindre une valeur fixe de saturation non-linéaire ($t \simeq 1000$). Phénoménologiquement, cette figure ressemble à la saturation obtenue dans des simulations purement radiatives et la convection ne semble pas *a priori*, trop influencer ni l'amplitude du mode, ni la saturation de son amplitude.

En revanche, sur la figure 5.2b, nous voyons que $\langle \rho u_z \rangle$ subit d'importantes variations au cours du temps et il n'y a pas de saturation précise sur une valeur. Au contraire, $\langle \rho u_z \rangle$ subit d'importants sauts pour atteindre par moment des valeurs proches de 0.

Ces deux simulations illustrent l'influence variable que peut avoir la convection sur la propagation des modes. Dans un cas, elle semble très faible puisque croissance et saturation se déroulent quasiment comme dans les simulations purement radiatives (Fig. 5.2a), alors que dans l'autre cas, un couplage fort s'installe conduisant à une forte modulation de l'amplitude par la convection (Fig. 5.2b).

Dans la suite du chapitre nous adopterons les noms donnés dans la table 5.1 pour désigner les différentes simulations auxquelles on se rapporte.

5.2.3 Domaine spectral

Il est intéressant de compléter cette première comparaison entre ces deux simulations par une étude dans le domaine spectral. Comme présenté en §4.1.2, à partir du moment vertical $\rho u_z(x, z, t)$, nous réalisons deux transformées de Fourier successives en espace suivant la direction x et en temps pour obtenir $\widehat{\rho u_z}(\ell, z, \omega)$. Pour un nombre ℓ donné, on obtient donc un spectre de puissance que l'on peut représenter dans le plan (z, ω) . Cette méthode permet d'identifier rapidement les modes présents dans une simulation donnée.

La figure 5.3a illustre l'application de cette méthode aux deux simulations de Fig. 5.2 pour des valeurs de ℓ comprises entre 0 et 2. Dans ces différents plans, et tout particulièrement pour $\ell = 0$, des signatures apparaissent autour de fréquences bien définies. Afin de déterminer précisément la valeur de ces fréquences, on intègre $\widehat{\rho u_z}(\ell, z, \omega)$ suivant z pour obtenir le spectre d'oscillations. Plusieurs pics correspondants soit aux valeurs propres, soit à des harmoniques du mode fondamental, apparaissent alors mais le mode ω_{00} domine clairement (Fig. 5.3a). Ceci implique que des couplages non-linéaires forts sont à l'oeuvre, et donc que des transferts d'énergie entre modes sont possibles comme dans le cas radiatif où le mode fondamental instable forçait le mode d'ordre 2 via une résonance 2 : 1. On note que le cas avec convection génère plus d'harmoniques du mode fondamental dans la simulation, et on peut relier ces non-linéarités supplémentaires à l'action des termes d'advection du type $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}$ qui sont importants au niveau de la zone convective. Le mécanisme de saturation non-linéaire semble dans ce cas plus compliqué puisqu'une simple résonance 2 : 1 entre modes propres n'est pas observée.

La figure 5.3b reproduit la même étude dans l'espace de Fourier pour la simulation G6 présentée en Fig. 5.2b. Dans ce cas là, seuls quelques modes acoustiques ressortent dans le plan (z, ω) ; principalement ω_{00} et ω_{10} . En revanche, il n'y a plus de signature d'harmoniques dans les spectres obtenus. Ce résultat est intéressant puisque la simulation étudiée représente un cas de couplage fort entre convection et oscillations. Cela montre que la convection peut totalement perturber la saturation non-linéaire « classique » obtenue

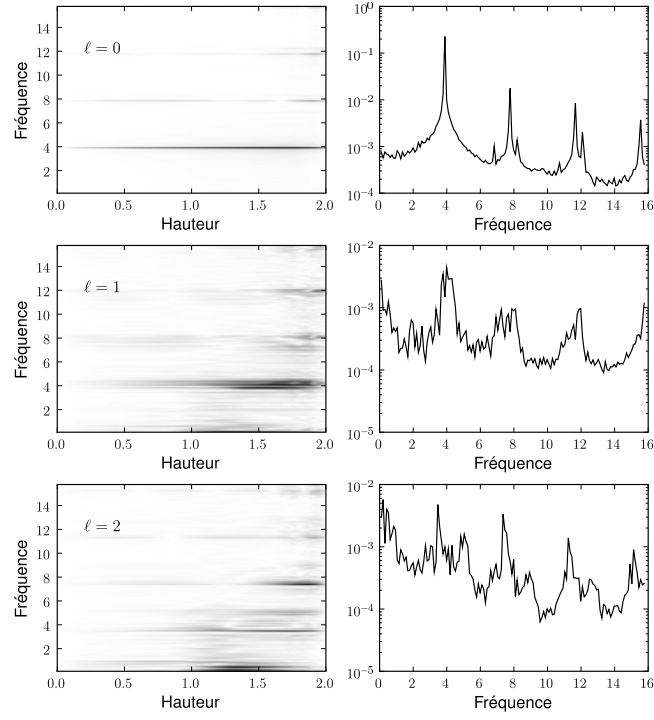
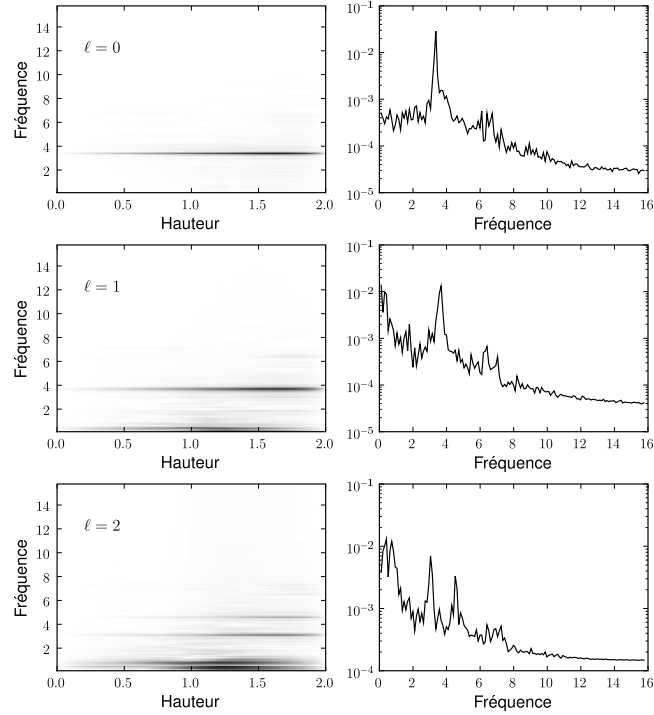
(a) $g = 8$, $F_{\text{bot}} = 4.5 \times 10^{-2}$ (b) $g = 6$, $F_{\text{bot}} = 3.7 \times 10^{-2}$

FIG. 5.3: **Gauche** : spectres en puissance du moment vertical ρu_z dans le plan (z, ω) pour $\ell \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. **Droite** : spectres uniquement en fréquence résultants d'une intégration suivant la direction verticale z . Les figures (a) et (b) correspondent respectivement aux simulations G8 et G6.

dans les cas purement radiatifs.

5.2.4 Phénomène de synchronisation

Parmi l'ensemble des simulations réalisées, certaines présentent un développement de la convection particulier. En effet, dans ces simulations les mouvements convectifs ont tendance à se synchroniser de manière à conduire à l'apparition de motifs périodiques.

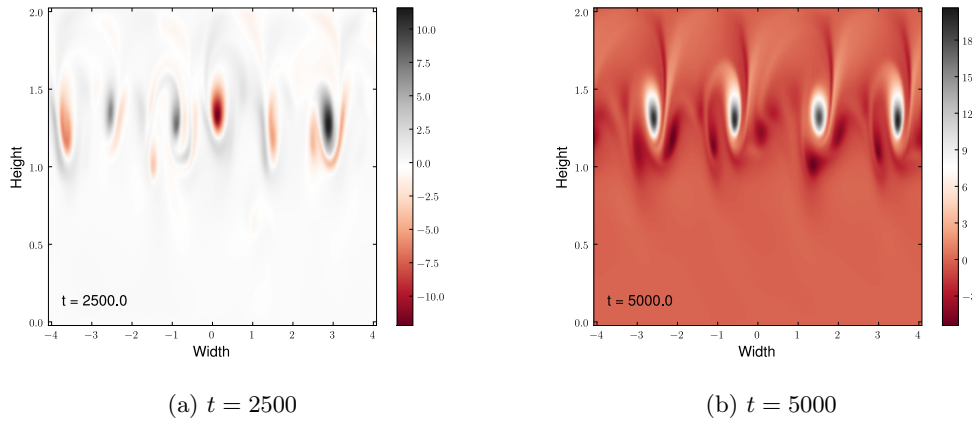


FIG. 5.4: Champ 2-D de vorticité pour les temps $t = 2500$ et $t = 5000$ dans la simulation G7 ($g = 7$ et $F_{\text{bot}} = 4 \times 10^{-2}$).

La figure 5.4 illustre ce phénomène pour la simulation G7. A deux instants particuliers de la simulation ($t = 2500$ et $t = 5000$), on a représenté le champ 2-D de vorticité dans le domaine. On constate sur la figure 5.4b que les vortex se répartissent de manière périodique. Si l'on s'intéresse à la longueur d'onde caractéristique, on obtient

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_x} \quad \text{avec} \quad k_x = \frac{2\pi}{L_x} \ell \quad \implies \quad \lambda = \frac{L_x}{\ell} \quad (5.7)$$

Il s'agit d'une boîte de dimension $L_x = 8$ et il y a 4 vortex une fois la synchronisation atteinte, on obtient donc $\lambda = 2$. Notons que ce phénomène de synchronisation apparaît très fréquemment dans les boîtes où le rapport d'aspect L_x/L_z est faible mais a également été obtenu dans des domaines de grande dimension comme ici.

Ces simulations synchronisées constituent une catégorie bien à part en comparaison de celles présentées dans la figure 5.2. Afin de quantifier précisément les effets de la convection sur les modes ainsi que les origines du mécanisme de synchronisation, il nous faut maintenant déterminer le contenu énergétique de chaque mode acoustique par l'intermédiaire de notre méthode de projection.

5.3 Contenus énergétiques

5.3.1 Présentation de la méthode

Pour déterminer le contenu énergétique des modes acoustiques, nous utilisons ici une approche plus simple que celle présentée dans le chapitre précédent. Comme dans le travail de Dintrans & Brandenburg (2004), on construit ici un sous-espace basé sur les vecteurs propres *adiabatiques*. Du fait de l'augmentation de ρ_{top} pour les simulations avec convection, l'approximation quasi-adiabatique devient en effet satisfaisante pour la prédiction de la vitesse verticale.

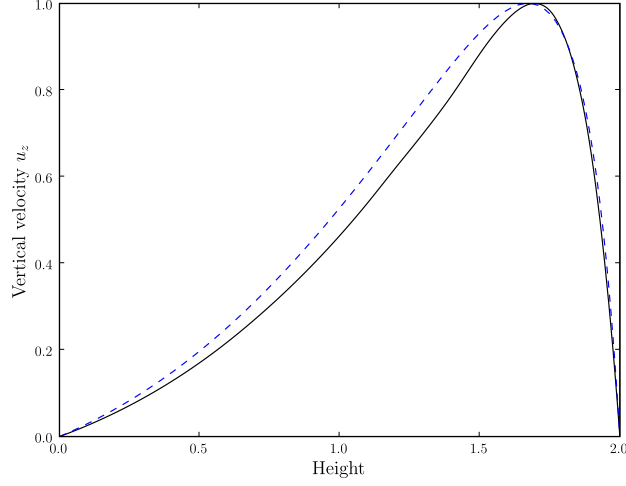


FIG. 5.5: Comparaison entre le profil vertical moyen issu de la DNS G8 (trait noir) et la fonction propre adiabatique u_z pour le mode acoustique fondamental ($n = 0$, $\ell = 0$) (tirets bleus).

La figure 5.5 montre une comparaison entre le profil vertical u_z moyen issu de la DNS (trait plein noir) et la fonction propre adiabatique (tirets bleus). On note un accord plutôt bon entre les deux profils, indiquant que l'on peut raisonnablement utiliser les vecteurs propres adiabatiques pour déterminer les contenus énergétiques et ce sans faire une erreur trop importante par rapport au cas complet étudié au §4.3.4. Cette approximation a l'avantage de simplifier drastiquement le calcul du contenu énergétique des modes puisque les vecteurs propres adiabatiques sont hermitiens et donc orthogonaux entre eux pour le produit scalaire suivant :

$$\langle \vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2 \rangle = \int_z \vec{\psi}_1^\dagger \cdot \vec{\psi}_2 \rho_0 dz. \quad (5.8)$$

(la démonstration est faite par Lynden-Bell & Ostriker 1967). Avec l'égalité de Parseval, on a alors

$$\int_V \rho_0 \vec{u}^2(x, y, z) dV = \int_k \rho_0 |\hat{u}|^2 d^3k, \quad (5.9)$$

où \hat{u} est la transformée de Fourier de \vec{u} . Dans notre cas, la transformée de Fourier est uniquement faite suivant la direction x avec $k_x = 2\pi/L_x \ell$, soit

$$E_{\text{kin}}^{\text{tot}} = \int_z \rho_0 \vec{u}^2(x, z) dx dz = \int_z \sum_{\ell=0}^{+\infty} \rho_0 |\hat{u}_\ell(z)|^2 dz. \quad (5.10)$$

Le sous-espace acoustique est ensuite introduit par la relation suivante :

$$\hat{u}_\ell(z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{\ell n}(t) \vec{\psi}_{\ell n}(z). \quad (5.11)$$

$c_{\ell n}$ est ici défini par

$$c_{\ell n}(t) = \langle \vec{\psi}_{\ell n}, \hat{u}_\ell \rangle = \int_z \rho_0 \vec{\psi}_{\ell n}^\dagger \cdot \hat{u}_\ell dz. \quad (5.12)$$

Avec Eqs. (5.10-5.11), l'orthogonalité des vecteurs propres conduit à

$$E_{\text{kin}}^{\text{tot}}(t) = E_{\text{kin}}^{\text{modes}}(t) + E_{\text{kin}}^{\text{conv}}(t) = \sum_{\ell=0}^3 \sum_{n=0}^4 |c_{\ell n}(t)|^2 + E_{\text{kin}}^{\text{conv}}(t) \quad (5.13)$$

Cette équation signifie que le contenu énergétique d'un mode acoustique particulier (ℓ, n) à un instant donné est simplement égal au carré de son coefficient de projection $c_{\ell n}(t)$.

5.3.2 Résultats

A l'aide de ce formalisme de projection sur les modes adiabatiques, nous pouvons déterminer l'évolution du rapport d'énergie cinétique $E_{\ell n}/E_{\text{tot}}$ pour chaque mode acoustique (ℓ, n) présent dans la DNS. Nous nous focalisons ici sur les deux simulations G6 et G8 montrées dans les figures 5.2a et 5.2b.

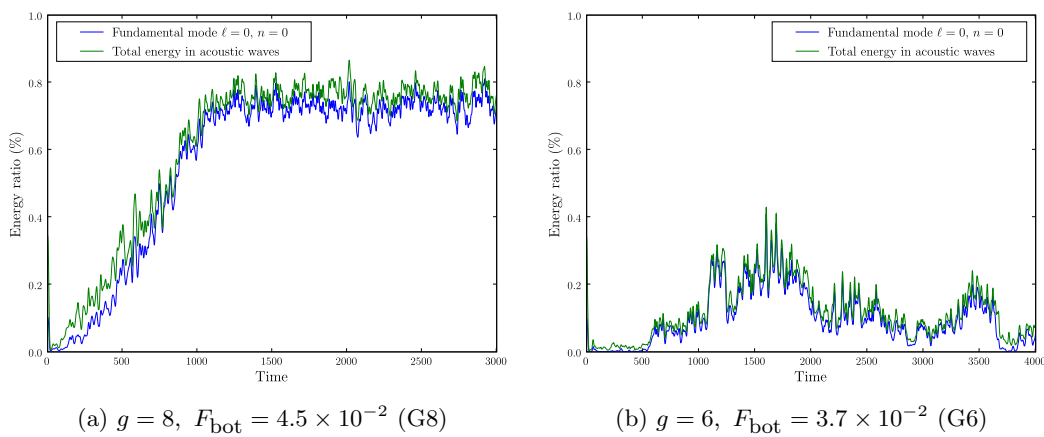


FIG. 5.6: Évolution temporelle du ratio d'énergie contenu dans le mode acoustique fondamental (trait bleu) et dans tous les modes acoustiques (trait vert) pour les simulations G8 (a) et G6 (b).

Dans la figure 5.6a, nous avons représenté en trait bleu le ratio d'énergie contenu dans le mode acoustique fondamental, i.e.

$$\frac{E_{00}}{E_{\text{kin}}^{\text{tot}}}. \quad (5.14)$$

Le trait vert représente quant à lui le ratio de l'énergie totale contenue dans les modes, i.e.

$$\frac{E_{\text{kin}}^{\text{modes}}}{E_{\text{kin}}^{\text{tot}}} = \frac{\sum_{\ell=0}^3 \sum_{n=0}^4 E_{\ell n}}{E_{\text{kin}}^{\text{tot}}}. \quad (5.15)$$

On constate que le mode fondamental instable représente quasiment toute l'énergie cinétique contenue dans les modes. La croissance du contenu énergétique est régulière et correspond bien à l'observation réalisée sur $\langle \rho u_z \rangle$ dans la figure 5.2a où la croissance du mode semblait peu influencée par la convection. La saturation a lieu à $t \simeq 1000$ pour une valeur proche de 80%. Dans cette simulation, le contenu énergétique des modes est donc très fort et les mouvements convectifs ne contribuent qu'à hauteur de 20% dans le bilan d'énergie cinétique. Ce résultat est conforme aux observations effectuées sur les figures 5.2a et 5.3a.

L'étude de la figure 5.6b donne des résultats bien différents. Là encore, le trait bleu concerne le mode ω_{00} et le trait vert l'énergie totale contenue dans les modes. On constate

une variabilité très importante de cette énergie avec des maxima proches de 40%. Cependant, conformément à Fig. 5.2b, aucune saturation n'est clairement établie. Pour les temps longs, le ratio d'énergie semble même tendre progressivement vers 0. Nous sommes donc dans une situation où la convection *tue* littéralement la croissance du mode. Cette situation est très intéressante puisque qu'elle correspond aux phénomènes observés au niveau du bord rouge de la bande d'instabilité des Céphéides.

5.3.3 Phénomène de synchronisation

Nous avons également étudié le contenu énergétique de la simulation synchronisée (Fig. 5.4).

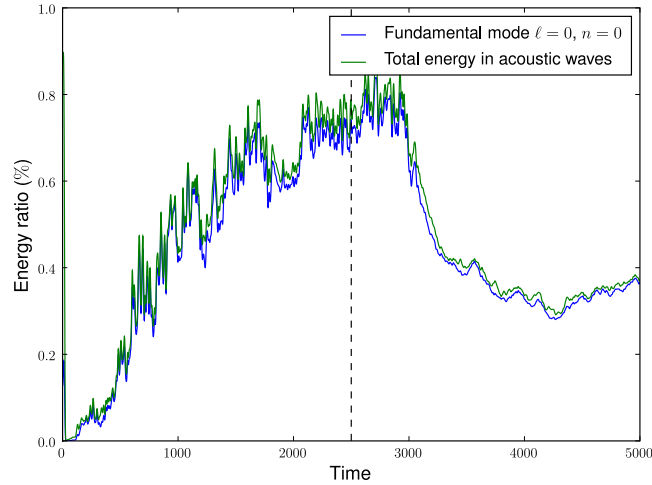


FIG. 5.7: Évolution temporelle du ratio d'énergie contenu dans les modes acoustiques pour la simulation G7. La ligne verticale en pointillés correspond au temps $t = 2500$ illustré sur la Fig. 5.4a.

Dans la première partie de la simulation, i.e. jusqu'à $t \simeq 2500$, le contenu énergétique des modes augmente régulièrement pour atteindre des valeurs proches de 80%. On semble donc s'orienter plutôt vers une simulation où le mode l'emporte sur la convection (comme sur la Fig. 5.6a). Néanmoins, à $t \simeq 3000$, le ratio énergétique chute brutalement. Cet instant correspond au moment où les mouvements convectifs se synchronisent. Dès lors, le ratio d'énergie va se fixer sur un palier « plus bas » pour atteindre une valeur d'environ 40%. La synchronisation est donc un phénomène soudain qui a des conséquences importantes sur l'évolution temporelle des contenus énergétiques.

5.3.4 Bilan

Ces premiers résultats ont donc permis de discriminer trois types de simulations :

1. Un premier type où le mode croît quasiment normalement et sature sur une amplitude bien déterminée comme dans les cas purement radiatifs. Dans ces simulations, le contenu énergétique des modes est très élevé et nous pouvons donc dire que la convection joue ici un rôle assez secondaire sur la dynamique des pulsations.
2. Un deuxième type pour lequel la croissance du mode est fortement modulée par la convection. On note la présence de chutes brutales et répétées dans l'amplitude des modes et les contenus énergétiques restent faibles. La convection joue ici un rôle majeur et tue la propagation du mode acoustique instable.

3. A ces deux résultats s'ajoutent les simulations synchronisées dans lesquelles un processus brutal fait changer très rapidement le ratio d'énergie et sature sur une valeur qui n'a rien à voir avec le ratio des simulations non-synchronisées.

Ces trois types de résultats sont donc très différents alors qu'à première vue les régimes de paramètres semblent assez proches, e.g. $g = 8$ contre $g = 6$ et $F_{\text{bot}} = 4.5 \times 10^{-2}$ contre $F_{\text{bot}} = 3.7 \times 10^{-2}$. Il est donc nécessaire de comparer des grandeurs physiques plus fondamentales pour séparer clairement ces séries de simulations.

5.4 Études paramétriques

5.4.1 Influence du nombre de Rayleigh

Dans un premier temps, nous avons cherché à déterminer l'influence du rapport d'aspect L_x/L_z et du nombre de Rayleigh sur le contenu énergétique des modes acoustiques. Le nombre de Rayleigh est défini par (Gough 1969)

$$\text{Ra} = -\frac{gd^4}{\nu\chi c_p} \frac{ds}{dz} = \frac{(\nabla - \nabla_{\text{adia}})gd^4}{\nu\chi H_p}, \quad (5.16)$$

où d est la taille caractéristique de la zone convective, ν la viscosité cinématique et $\chi = K/\rho c_p$ la diffusivité radiative.

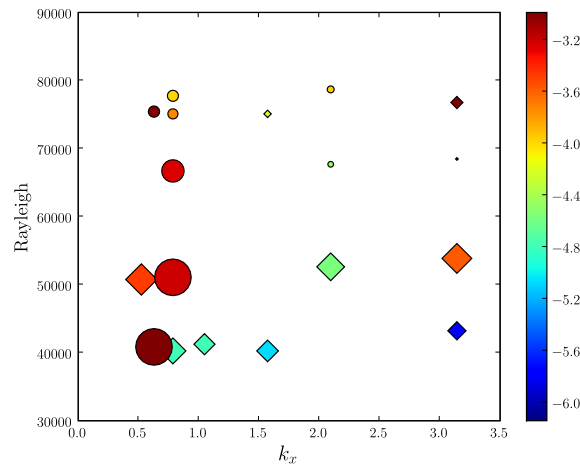


FIG. 5.8: Position des simulations réalisées dans le plan (k_x, Ra) . Les losanges correspondent aux simulations « synchronisées », les disques aux autres simulations. La taille des symboles correspond à la valeur du ratio d'énergie et la couleur à la variation de l'évolution temporelle de ce rapport.

Pour chaque simulation numérique, nous avons calculé le nombre de Rayleigh et le vecteur d'onde minimum $k_x \equiv 2\pi/L_x$. Les résultats ont ensuite été reportés dans un plan (k_x, Ra) (Fig. 5.8). Nous avons représenté par des losanges les simulations synchronisées et par des disques les autres simulations. De plus, la surface des symboles est proportionnelle au contenu énergétique des modes, i.e. les symboles les plus grands correspondent à des simulations où le ratio d'énergie est le plus important (typiquement 80%). La variabilité temporelle du ratio $E_{\ell n}/E_{\text{tot}}$ est également prise en compte via la table de couleur suivante : plus la couleur va vers le rouge (bleu), plus la variabilité est importante (faible).

Plusieurs tendances découlent des résultats donnés dans la figure 5.8. On s'aperçoit premièrement que quel que soit la valeur de k_x , le nombre de Rayleigh Ra a une forte influence sur le contenu énergétique. En effet, pour les simulations ayant des Rayleigh

« faibles », i.e. $Ra = 40000$, le ratio énergétique des modes est plutôt élevé (souvent supérieur à 50%). Un exemple typique de ces simulations est le cas G8 présenté dans les Figs. 5.2a et 5.6a. En revanche, plus le nombre de Rayleigh augmente et plus ce ratio diminue, finissant à des valeurs inférieures à 5% pour des Rayleigh de 75000 (un cas type est la simulation G6 présentée dans les Figs. 5.2b et 5.6b). Plus le nombre de Rayleigh est élevé et plus la déformation des champs moyens (et en particulier du profil de température) par rapport aux profils d'équilibre est importante. Il est ainsi envisageable que la déformation de ces profils constatée dans la simulation G6 soit à l'origine de la stabilisation du mode acoustique linéairement instable.

D'autre part, les simulations synchronisées semblent toutes localisées, soit dans une zone à faible Rayleigh, soit dans des boîtes de faible rapport d'aspect (i.e. grand k_x). La majorité d'entre elles montrent en plus une faible variabilité temporelle, contrairement aux simulations non-synchronisées. Ce résultat est en accord avec la régularité des cellules convectives observée par exemple sur la figure 5.4b, induisant une faible variabilité des différents champs physiques. La figure 5.7 montre également qu'après synchronisation, la variabilité du ratio énergétique est bien moindre.

5.4.2 Synchronisation et temps de retournement

Le phénomène de synchronisation de la convection peut être également mis en évidence en comparant les temps caractéristiques des différentes simulations. Dans notre cas, une grandeur pertinente à étudier est le rapport entre le temps de retournement de la convection et la période du mode acoustique fondamental, soit

$$\frac{t_{\text{conv}}}{t_{\text{acous}}} = \frac{t_{\text{conv}}}{\Pi}, \quad (5.17)$$

où Π est la période du mode acoustique excité par κ -mécanisme. Dans nos simulations, nous avons estimé le temps caractéristique de la convection par l'intermédiaire de la vorticité, i.e.

$$t_{\text{conv}} \equiv \min \left(1 / \|\vec{\text{rot}} \vec{u}\| \right). \quad (5.18)$$

Pour chaque simulation, nous avons donc calculé la valeur du rapport t_{conv}/Π et construit les diagrammes (k_x , t_{conv}/Π) (Fig. 5.9a) et (t_{conv}/Π , Ra) (Fig. 5.9b). Les losanges bleus représentent les simulations synchronisées et les disques verts les simulations non-synchronisées, alors que la taille des symboles est liée au ratio énergétique des modes.

La figure 5.9a montre que toutes les DNS synchronisées ont un temps de retournement similaire ($t_{\text{conv}}/\Pi \simeq 0.4$) alors que les simulations non-synchronisées ont des temps convectifs plus long. Ce résultat est également visible sur la figure 5.9b puisque la majorité des simulations synchronisées sont situées dans une zone précise du diagramme à des nombres de Rayleigh plutôt faibles.

Comme l'a montré la figure 5.7, le phénomène de synchronisation se met en place brutalement. Une fois synchronisées, les cellules convectives se mettent en place suivant des échelles spatiale et temporelle précises. Concernant le temps de retournement, il a tendance à diminuer fortement au moment de la synchronisation pour arriver à une valeur quasi-constante, i.e. $t_{\text{conv}}/\Pi \simeq 0.4$. On peut donc voir ce phénomène de synchronisation comme une sorte de résonance spatiale. Les boîtes de faible rapport d'aspect et/ou à faible Rayleigh ont en général leur dynamique globale imposée par les oscillations. Dès lors, la convection va s'adapter et aboutir bien souvent à des situations synchronisées.

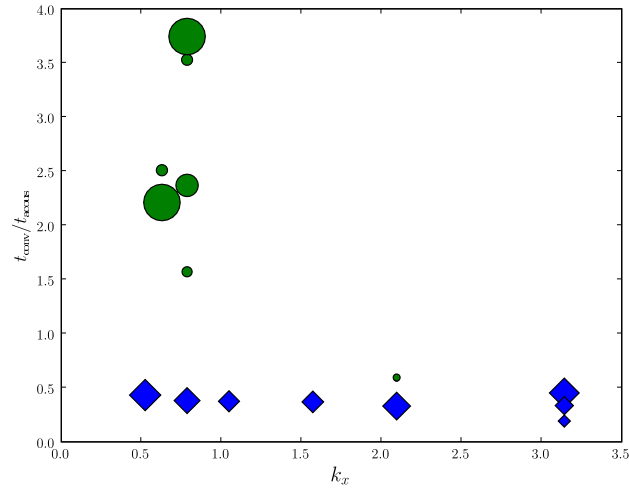
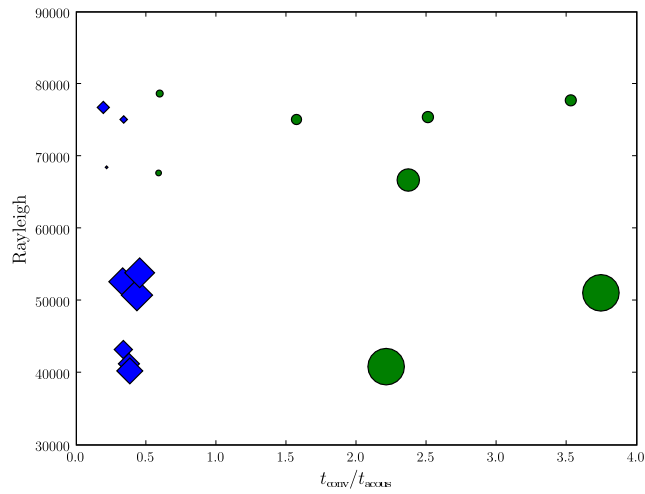
(a) Étude $(k_x, t_{\text{conv}}/\Pi)$ (b) Étude $(t_{\text{conv}}/\Pi, \text{Ra})$

FIG. 5.9: Position des DNS dans un plan $(k_x, t_{\text{conv}}/\Pi)$ (a) et dans un plan $(t_{\text{conv}}/\Pi, \text{Ra})$ (b). Les losanges bleus correspondent aux simulations synchronisées et les disques verts aux simulations non-synchronisées. La taille des symboles est là encore proportionnelle au contenu énergétique des modes.

5.5 Évolution des flux et MLT dépendante du temps

La dernière partie de l'étude du couplage convection-pulsations concerne l'évolution temporelle des flux. L'intérêt principal de ce travail est d'examiner la pertinence des modèles de MLT dépendante du temps présentés en §1.4.

5.5.1 Flux dans les DNS

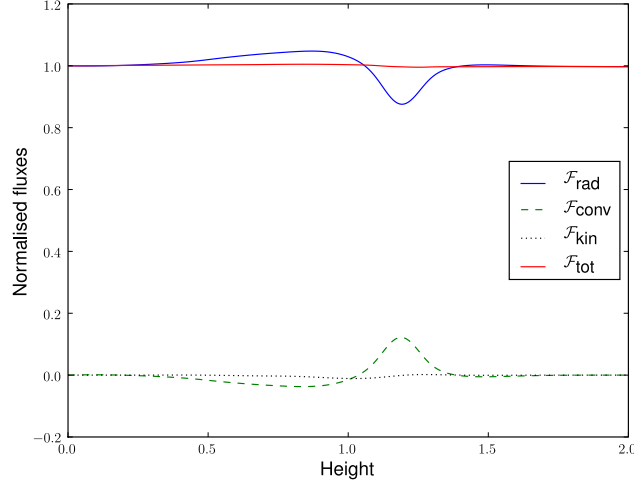


FIG. 5.10: Profils verticaux moyens du flux radiatif (trait plein bleu), du flux convectif (pointillés verts), du flux cinétique (points noirs) et du flux total (trait plein rouge) normalisés à la valeur du flux imposé en bas de la boîte F_{bot} (simulation G6).

Les flux radiatif, convectif et cinétique sont définis par les expressions suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{F}_r(z, t) = -K \nabla T, \\ \mathcal{F}_c(z, t) = \langle \rho \rangle c_p \langle T' u_z \rangle, \\ \mathcal{F}_t(z, t) = \frac{1}{2} \langle \rho \rangle \langle (u_x^2 + u_z^2) u_z \rangle, \end{cases} \quad (5.19)$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne une moyenne horizontale et les quantités primées représentent les fluctuations par rapport à la moyenne. La figure 5.10 représente les profils verticaux des flux moyennés en temps pour la simulation G6 : en bleu le flux radiatif, en vert le flux convectif et en noir le flux cinétique (les flux ont été normalisés à la valeur du flux F_{bot} imposé en bas de la boîte). Dans la zone convective, le flux convectif représente environ 20% du flux total transporté et sur l'ensemble de nos simulations, cette valeur est relativement constante. Le flux cinétique reste quant à lui très faible, i.e. de l'ordre de 1 à 2% du flux total. Notons que le flux total (en rouge) reste bien constant suivant la direction verticale de la boîte ce qui nous assure que nos simulations sont bien relaxées thermiquement.

Au-delà de la variation spatiale des flux moyens, il est intéressant de regarder aussi leur évolution temporelle. Si l'on se focalise sur le flux convectif, on peut regarder dans le domaine spectral si ce flux est bien modulé par la fréquence du mode acoustique instable.

La figure 5.11a correspond à la simulation G8 dans laquelle le mode acoustique a un ratio énergétique élevé ($> 80\%$). On a également représenté par des traits verticaux les fréquences propres calculées avec LSB. Le spectre montre plusieurs pics à des fréquences bien précises mais le pic à ω_{00} domine clairement. Les autres fréquences observées sont des

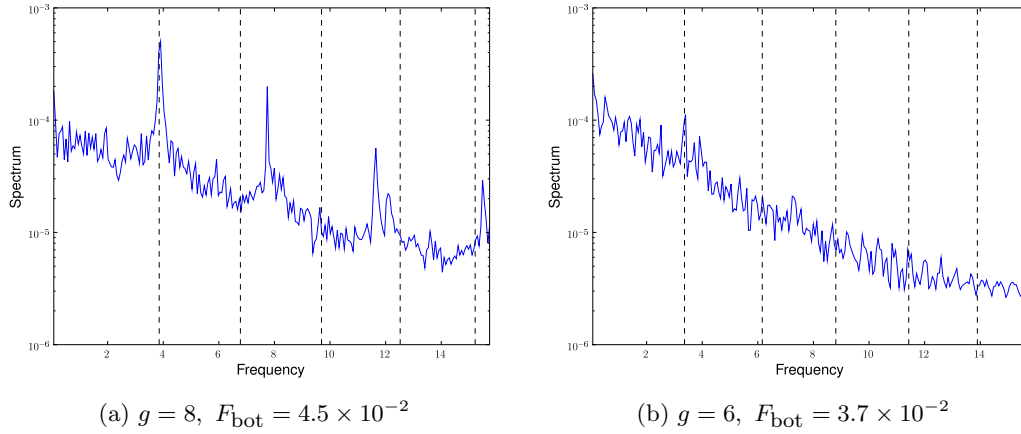


FIG. 5.11: Transformée de Fourier du flux convectif pour la simulation G8 **(a)** et la simulation G6 **(b)**. Les lignes verticales en pointillés désignent la position des différentes fréquences des modes propres d'oscillation.

harmoniques du mode fondamental. Notons que leurs fréquences (qui sont des multiples entiers de la fréquence du mode fondamental) ne correspondent pas au spectre des valeurs propres. Comme dans le spectre obtenu dans la figure 5.3a, la signature fréquentielle du mode fondamental ressort clairement : le flux convectif est donc bien modulé au cours du temps par les pulsations.

En revanche, pour la simulation G6 (Fig. 5.11b), le spectre obtenu ne fait apparaître aucun pic correspondant aux fréquences propres. Dans cette simulation où le ratio énergétique des modes est très faible (Fig. 5.6b), la convection se développe indépendamment des oscillations. Le flux convectif n'est donc pas modulé par la convection.

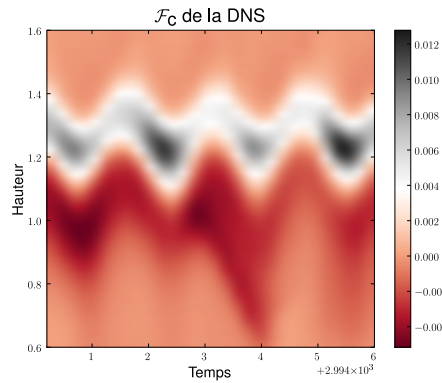


FIG. 5.12: Diagramme (t, z) montrant l'évolution temporelle du flux convectif $\mathcal{F}_c(z, t)$ sur une partie de la boîte (simulation G8).

Dans le cas où le mode l'emporte, la modulation du flux convectif apparaît visuellement si l'on représente $\mathcal{F}_c(z, t)$ dans le plan (t, z) . La figure 5.12 montre l'oscillation de la zone convective (zones noires) au cours de six pas de temps (ce qui correspond à environ trois périodes du mode fondamental) pour la simulation G8. Les zones en rouge sombre montrent l'overshooting situé juste en dessous du trou de conductivité radiative.

On constate donc de manière assez intuitive que les simulations à fort ratio énergétique présentent une forte modulation du flux convectif au cours du temps à la fréquence du mode instable, alors que les simulations où ce mode est tué par la convection ont un flux convectif non-modulé par les oscillations.

5.5.2 DNS et longueur de mélange dépendante du temps

5.5.2.1 Flux convectif

Afin de déterminer la précision des théories de MLT dépendante du temps, nous allons comparer l'évolution temporelle du flux convectif de la DNS avec les grandeurs suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{\text{St}}(z, t) = \alpha \frac{A}{B} \mathcal{E}_t \text{sign}(\nabla - \nabla_{\text{adia}}) \sqrt{|\nabla - \nabla_{\text{adia}}|}, \\ \mathcal{F}_{\text{Ku}}(z, t) = \alpha A \sqrt{\mathcal{E}_t} (\nabla - \nabla_{\text{adia}}), \end{cases} \quad (5.20)$$

où

$$A \equiv c_p \langle \rho \rangle \langle T \rangle \quad \text{et} \quad B \equiv c_p \nabla_{\text{adia}} \langle T \rangle. \quad (5.21)$$

Les grandeurs \mathcal{F}_{St} et \mathcal{F}_{Ku} représentent les modélisations respectives de [Stellingwerf \(1982b\)](#) et [Kuhfuß \(1986\)](#) dont le calcul est détaillé dans le §1.4. Ces modélisations ont été testées et adaptées par la suite entre autres par [Gehmeyer & Winkler \(1992b\)](#); [Yecko *et al.* \(1998\)](#) et [Bono *et al.* \(1999\)](#).

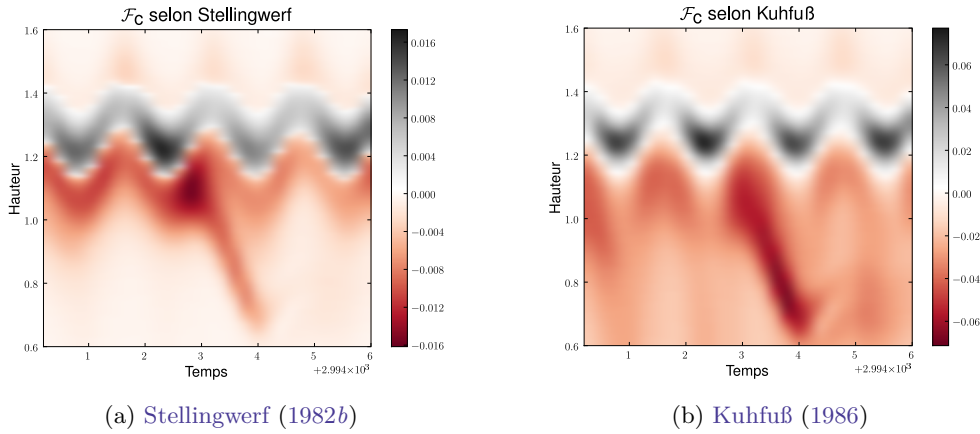


FIG. 5.13: Diagramme (t, z) montrant l'évolution temporelle du flux convectif selon les approches de [Stellingwerf \(a\)](#) et de [Kuhfuß \(b\)](#).

A partir des champs de la DNS, nous avons calculé $\mathcal{F}_{\text{Ku}}(z, t)$ et $\mathcal{F}_{\text{St}}(z, t)$ pour la simulation G8 présentée dans la figure 5.12 en choisissant $\alpha = 1$. Les résultats sont donnés dans la figure 5.13. Phénoménologiquement, tant la prescription de [Kuhfuß](#) (Fig. 5.13b) que celle de [Stellingwerf](#) (Fig. 5.13a) montrent une modulation du flux convectif similaire à celle observée sur le flux convectif de la DNS. De même, l'extension de la zone convective prédite est tout à fait compatible avec celle observée dans la simulation. La zone d'overshooting apparaît également de manière claire dans les deux prescriptions. Néanmoins, on constate que les valeurs maximales atteintes par les flux en choisissant un coefficient $\alpha = 1$ ne correspondent pas aux extrema obtenus dans la DNS (Fig. 5.12). Il est donc nécessaire de déterminer les coefficients α optimaux pour les deux modélisations par rapport à la simulation numérique étudiée.

5.5.2.2 Détermination des coefficients α

Nous avons donc dans un premier temps tracé dans le plan (t, z) les rapports

$$\alpha_{\text{Ku}}(z, t) = \frac{\mathcal{F}_c(z, t)}{\mathcal{F}_{\text{Ku}}(z, t)} \quad \text{et} \quad \alpha_{\text{St}}(z, t) = \frac{\mathcal{F}_c(z, t)}{\mathcal{F}_{\text{St}}(z, t)}. \quad (5.22)$$

Ceci nous permet d'une part de localiser les endroits éventuels où les modèles de MLT ont le plus de difficultés à reproduire la DNS, et d'autre part de vérifier si une modélisation avec un α constant au cours du temps est satisfaisante.

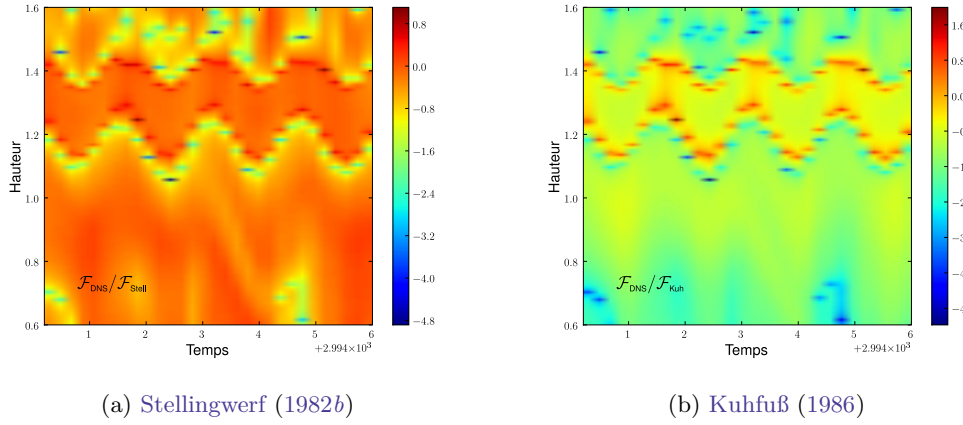


FIG. 5.14: Évolution temporelle des coefficients α_{Ku} et α_{St} dans le plan (t, z) .

La figure 5.14 montre les résultats obtenus en échelle logarithmique pour les deux prescriptions données dans l'équation (5.20). Notons que seule une partie du domaine centrée autour de la zone convective est donnée ici, i.e. $z \in [0.6, 1.6]$. Pour la prescription de Stellingwerf (Fig. 5.14a), on constate une homogénéité assez large du coefficient tant suivant z que suivant t . Les variations les plus brutales de α_{St} se font à l'interface entre la zone radiative et la zone convective. Pour celle de Kuhfuß (Fig. 5.14b), il semble y avoir plus de variations spatiales du coefficient α_{Ku} . En particulier, la valeur optimale à l'intérieur de la zone convective semble bien différente de celle à l'extérieur. Encore une fois, l'interface zone convective - zone radiative pose problème.

Un moyen de déterminer précisément la valeur de α optimale est de construire la distribution des valeurs du coefficient à partir des diagrammes (t, z) où pour chaque point dans le plan (t, z) , on a reporté la valeur du coefficient α obtenue.

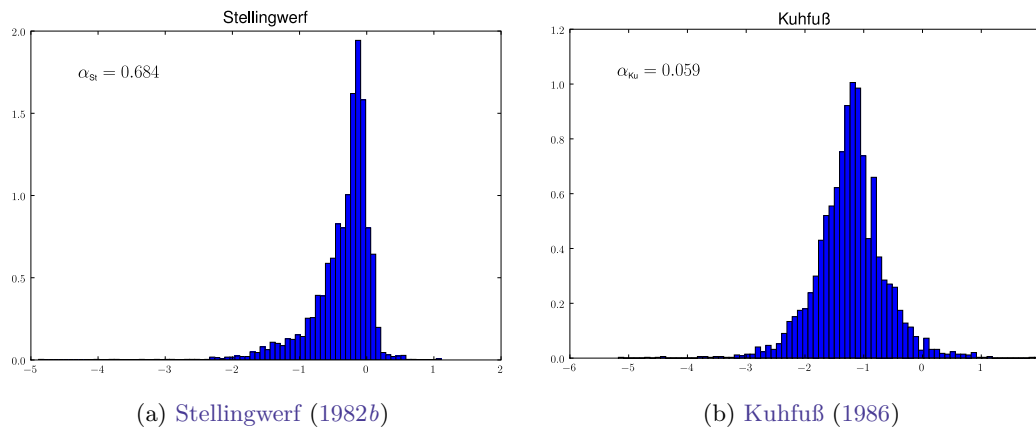


FIG. 5.15: Distribution des paramètres α obtenus en échelle logarithmique. Dans chaque cas le α optimal est indiqué.

Les résultats sont représentés sur la figure 5.15 en échelle logarithmique. Pour le modèle de Stellingwerf (Fig. 5.15a), on obtient une distribution centrée sur une valeur de coefficient $\alpha_{\text{St}} = 0.684$. Comme on pouvait déjà le voir dans la figure 5.14a, la dispersion en valeurs

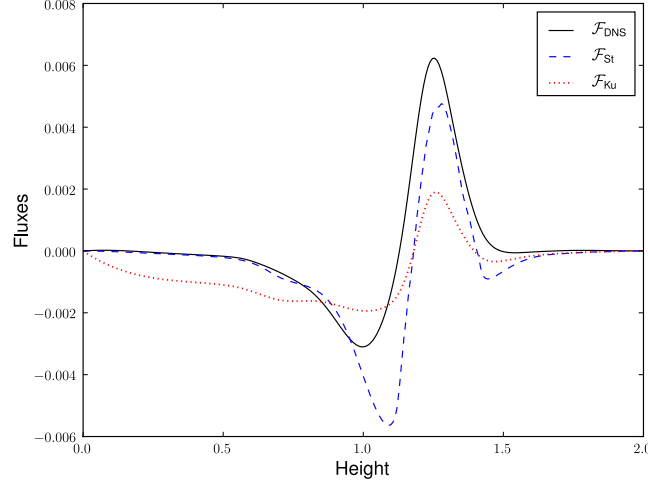


FIG. 5.16: Profils verticaux des flux convectifs après avoir fait une moyenne en temps : le flux de la DNS est indiqué en trait plein noir, la modélisation de [Stellingwerf](#) en tirets bleus et celle de [Kuhfuß](#) en pointillés rouges.

reste relativement modérée et la distribution est bien piquée. Concernant le modèle de [Kuhfuß](#) (Fig. 5.15b), on obtient une distribution centrée sur le coefficient $\alpha_{\text{Ku}} = 0.059$. La dispersion des valeurs est ici plus importante que pour la modélisation de [Stellingwerf](#) et la distribution est nettement moins piquée. La modélisation de [Stellingwerf](#) semble donc plus homogène en temps et en espace que celle de [Kuhfuß](#). Ce résultat est confirmé si l'on s'intéresse aux profils verticaux du flux convectif (i.e. on réalise une moyenne en temps $\langle \mathcal{F}_c(z, t) \rangle_t$). En utilisant les coefficients α_{St} et α_{Ku} optimaux issus de la figure 5.15, on peut alors comparer le profil vertical de la DNS avec les prescriptions de MLT dépendante du temps.

La figure 5.16 illustre les résultats obtenus où la courbe en trait plein noir représente le profil vertical du flux convectif moyen issu de la DNS, la courbe en tirets bleus est la prescription de [Stellingwerf](#) avec $\alpha_{\text{St}} = 0.684$ et la courbe en pointillés rouges celle de [Kuhfuß](#) avec $\alpha_{\text{Ku}} = 0.059$. On constate que l'accord avec la DNS est bien meilleur pour la modélisation de [Stellingwerf](#) que pour celle de [Kuhfuß](#) qui a énormément de difficultés à prédire la partie radiative du domaine. Comme mentionné précédemment, le désaccord le plus important se situe à l'interface entre le bas de la zone convective et la zone radiative où l'overshooting prédit par les modèles de MLT est beaucoup plus important que celui observé dans la simulation. Néanmoins, la prédiction de [Stellingwerf](#) est satisfaisante et reproduit assez bien le flux convectif de la simulation.

Le dernier point à propos des modèles de MLT dépendante du temps concerne leur variabilité temporelle ainsi que leur sensibilité aux régimes de paramètres utilisés. Pour ce faire, nous avons déterminé les coefficients α_{St} et α_{Ku} optimaux pour différentes simulations ayant des rapports d'aspect variables et des valeurs de g et F_{bot} différents. Dans chaque cas, les coefficients α ont été noté à trois instants différents, i.e. $t = 1000$, $t = 2000$ et $t = 3000$. La table 5.2 synthétise les résultats obtenus. Au niveau temporel, on peut constater qu'au sein d'une même simulation, les coefficients α_{Ku} et α_{St} subissent des variations pouvant être supérieures à un facteur 2. Entre deux jeux de paramètres différents (g , F_{bot} , L_x), la variabilité est encore plus élevée pour le coefficient α_{Ku} , i.e. de 0.039 à 0.208 soit un facteur 5. La modélisation de [Stellingwerf](#) est quant à elle un peu plus homogène et dépend moins du jeu de paramètres choisi (variation d'un facteur 2 « seulement », i.e. $\alpha \in [0.363, 0.869]$).

Les comparaisons entre les DNS du couplage convection-pulsations et les deux prin-

	Stellingwerf			Kuhfuß		
	$t = 1000$	$t = 2000$	$t = 3000$	$t = 1000$	$t = 2000$	$t = 3000$
$F_{\text{bot}} = 4.5 \times 10^{-2}$ $g = 8, L_x = 8$	0.566	0.678	0.683	0.064	0.070	0.059
$F_{\text{bot}} = 3.7 \times 10^{-2}$ $g = 6, L_x = 8$	0.776	0.597	0.673	0.039	0.086	0.076
$F_{\text{bot}} = 4 \times 10^{-2}$ $g = 6, L_x = 8$	0.426	0.869	0.837	0.060	0.094	0.090
$F_{\text{bot}} = 4.5 \times 10^{-2}$ $g = 8, L_x = 2$	0.447	0.749	0.613	0.159	0.096	0.145
$F_{\text{bot}} = 4 \times 10^{-2}$ $g = 7, L_x = 2$	0.515	0.379	0.363	0.095	0.180	0.208
$F_{\text{bot}} = 3.5 \times 10^{-2}$ $g = 6, L_x = 2$	0.417	0.565	0.500	0.141	0.114	0.122

TAB. 5.2: Comparatif des coefficients α_{Ku} et α_{St} dans différentes simulations et à différents instants donnés.

cipales théories de la MLT dépendante du temps montrent que la modélisation de Stellingwerf est meilleure que celle de Kuhfuß puisqu'elle donne d'une part un meilleur accord spatial avec la DNS au niveau des flux (Fig. 5.16), et qu'elle affiche d'autre part une moins grande dispersion des valeurs entre différentes simulations (signe d'une plus grande robustesse). L'étude menée ici présente uniquement les résultats concernant le flux convectif. Le calcul des flux cinétiques semble montrer un accord bien moins bon entre ces théories et les DNS. Néanmoins, ce dernier résultat n'est peut-être pas significatif au vu des faibles niveaux de flux cinétique obtenus dans nos simulations (cf Fig. 5.10 où ce flux ne représente qu'environ 1% du flux total).



Conclusions et perspectives

C'est le commencement qui est le pire, puis le milieu puis la fin ; à la fin, c'est la fin qui est le pire.

Samuel BECKETT

Conclusions

LE couplage convection-pulsations affecte principalement les étoiles Céphéides proches du bord rouge de la bande d'instabilité dans le diagramme de Hertzsprung-Russell (HR), i.e. les Céphéides les plus « froides ». A l'heure actuelle, les modèles qui reproduisent le mieux la structure de cette bande d'instabilité et la position de son bord rouge reposent sur des théories de longueur de mélange (MLT) dépendante du temps. Mais ces modèles ont deux inconvénients majeurs :

1. Ils reposent sur de nombreux paramètres libres sans dimension dont les valeurs ne sont ni connues *a priori*, ni universelles.
2. Ils sont dérivés à partir d'approximations dont la validité n'a été testée par aucune expérience.

Face aux manques de consistance de ces modèles MLT, les simulations numériques directes (DNS) peuvent fournir des éléments de réponse puisque les non-linéarités cruciales au couplage convection-pulsations sont pleinement traitées. Elles apportent ainsi des contraintes tant sur les valeurs des paramètres libres que sur la validité des approximations faites. Ce travail de thèse s'inscrit pleinement dans cette optique. Cependant, la réalisation des DNS du couplage convection-pulsations à partir de modèles *réalistes* de Céphéides est un travail de longue haleine et nous avons cherché à simplifier le problème hydrodynamique tout en conservant « la substantifique moelle » de la physique impliquée. Nous avons ainsi modélisé le κ -mécanisme responsable des oscillations par l'étude d'un phénomène physique similaire : la propagation d'ondes acoustiques dans une couche de gaz plan-parallèle partiellement ionisée.

Notre premier modèle a consisté en une couche *entièrement radiative* dans laquelle la zone d'ionisation est représentée par un profil de conductivité radiative $K(T)$ paramétrique et uniquement dépendant de la température. Cette approche nous a permis de changer facilement la position et la forme de cette zone d'ionisation en jouant sur les différents paramètres de ce profil (e.g. son amplitude, sa largeur, sa température, etc.). Nous avons vérifié dans un premier temps qu'un trou de conductivité d'une amplitude suffisante conduisait à la condition

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \ln K}{\partial \ln T} \right)_\rho < 0,$$

pour le critère d'instabilité des modes acoustiques radiaux. Mais une autre condition doit cependant être satisfaite pour obtenir une véritable *valve d'Eddington* (1917) : la zone

d'ionisation doit être située dans une région particulière de l'étoile qui est ni trop profonde, ni trop près de sa surface. En fait, cette zone doit être superposée à ce que l'on appelle la *région de transition*, soit $T_{\text{ionisation}} \simeq T_{\text{transition}}$, avec $T_{\text{transition}}$ donnée par

$$\Psi = \frac{\langle c_v T_{\text{transition}} \rangle \Delta m}{\Pi L} \simeq 1,$$

où Δm correspond à la masse intégrée entre la zone de transition et la surface, Π est la période du mode acoustique instable et L la luminosité de l'étoile. Les différents paramètres libres de notre modèle – e.g. la gravité et le flux radiatif total, les valeurs imposées au niveau des bords sur la densité et la température – nous ont permis d'ajuster les champs d'équilibre de telle sorte que cette région de transition soit située au milieu du domaine numérique. L'analyse de stabilité linéaire menée ensuite a confirmé les deux critères énoncés précédemment puisque seuls les modèles d'équilibre satisfaisant aux deux conditions ont conduit à l'apparition de modes instables. Notre approche simplifiée du κ -mécanisme s'est donc révélée satisfaisante dans ce premier modèle *radiatif* pour reproduire les principaux processus physiques responsables des oscillations des Céphéides (Gastine & Dintrans 2008a).

La suite naturelle de ce premier travail a consisté en l'étude de la saturation non-linéaire des modes linéairement instables excités par κ -mécanisme. L'idée de départ est simple : lancer des simulations numériques directes à partir des modèles d'équilibre supposés être les plus instables linéairement. Le code utilisé pour faire ces DNS est le Pencil Code, qui est un code aux différences finies *explicite* en temps. Autrement dit, le pas de temps est limité par les différents temps physiques de la simulation dont les principaux sont : (i) le temps de propagation des ondes acoustiques $\delta z / c_s$ où δz est le pas de la grille et c_s la vitesse du son ; (ii) les temps de diffusions visqueuse $\delta z^2 / \nu$ (ν étant la viscosité) et radiative $\delta z^2 / \chi$ (χ étant la diffusivité radiative). Cela conduit à la fameuse condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) donnée par

$$dt \leq \min \left(\frac{\delta z}{c_s}, \frac{\delta z^2}{\nu}, \frac{\delta z^2}{\chi} \right).$$

Mais la trop grande diffusivité radiative en surface de nos modèles d'équilibre conduit systématiquement à un pas de temps CFL beaucoup trop petit pour espérer une résolution entièrement explicite des équations de Navier-Stokes. En conséquence, nous avons développé un solveur *implicite* du terme de diffusion radiative qui est basé sur un schéma aux directions alternées (ADI).

Les DNS ainsi réalisées ont fourni un excellent accord aux temps courts avec les résultats de l'analyse de stabilité linéaire, et ce tant sur les taux de croissance des modes que sur leur structure spatiale. La saturation non-linéaire aux temps longs a été également atteinte. Afin d'étudier les mécanismes physiques conduisant à cette saturation, nous avons alors développé une méthode de projection sur un espace adapté de vecteurs propres. Comme les modèles instables sont tous non-adiabatiques, les vecteurs propres pour les perturbations linéaires ne constituent pas une base orthonormée sur laquelle on peut projeter les champs de la DNS. Il a donc été nécessaire de construire le problème adjoint pour les perturbations qui a pour propriété d'avoir des vecteurs propres orthogonaux aux vecteurs réguliers. A partir de ces deux familles de vecteurs propres, on peut alors calculer la valeur des coefficients de projection à chaque instant t de la simulation, et donc avoir accès à l'évolution temporelle de l'amplitude et de l'énergie de chaque mode acoustique présent dans la DNS.

Ce formalisme nous a permis de montrer que plus de 98% de l'énergie cinétique totale était contenue dans le mode acoustique fondamental *instable* et dans le mode d'ordre 2 (i.e. $n = 2$) linéairement *stable*. La présence de ce dernier est *a priori* une surprise, et ce d'autant plus qu'il représente environ 10% de l'énergie cinétique totale ! Il est en fait

impliqué dans la saturation non-linéaire via un mécanisme de résonance de type 2 : 1 avec le mode fondamental, car le rapport des périodes propres est de l'ordre de $P_2/P_0 \simeq 0.5$. Cela signifie que le mode fondamental instable fournit de l'énergie au mode $n = 2$, qui agit alors comme un puits d'énergie, et ce couplage participe à la saturation non-linéaire de l'instabilité.

Cette résonance 2 : 1 est intéressante puisque c'est précisément ce mécanisme physique qui a été proposé pour expliquer l'apparition d'un « bump » secondaire dans les courbes de luminosité des *bump*-Céphéides. La position de ce bump par rapport au maximum de la courbe de luminosité définit aussi ce que l'on appelle la « progression d'Hertzsprung » basée sur la valeur du rapport des périodes P_2/P_0 . Afin de couvrir un intervalle suffisamment grand en P_2/P_0 , nous avons réalisé plus de 400 DNS et tracé à chaque fois la courbe de luminosité associée. Notre modèle a été non seulement capable de reproduire un bump secondaire dans ces courbes de luminosité, mais a aussi conduit à une progression d'Hertzsprung : le bump secondaire est bien situé dans la partie ascendante de la courbe de lumière pour un rapport $P_2/P_0 < 1/2$, et dans la partie descendante pour un rapport $P_2/P_0 > 1/2$ (Gastine & Dintrans 2008b).

Dans la dernière partie de ce travail, nous nous sommes focalisés sur des *modèles convectifs* afin d'étudier le couplage convection-pulsations. En partant des modèles purement radiatifs, nous avons modifié différents paramètres (en particulier le flux et la gravité) pour obtenir une zone convective située au niveau de la zone d'ionisation. Dès lors, du fait des modes acoustiques excités par κ -mécanisme, nous avons réalisé des DNS de convection oscillante. Les résultats obtenus sont variés et montrent une dépendance assez forte envers le nombre de Rayleigh Ra qui quantifie la vigueur de la convection :

- Pour des simulations avec $Ra \lesssim 4 \times 10^4$, la croissance des modes et leur saturation non-linéaire ont un comportement quasi-identique à celui observé dans le cas purement radiatif. Les ratios d'énergie, toujours obtenus grâce à la méthode de projection sur les vecteurs propres, sont très élevés et comparables à ceux obtenus sans convection, i.e. $\sim 80\%$ de l'énergie cinétique totale est contenue dans les modes acoustiques (les 20% restants étant bien entendu dans les mouvements convectifs). De plus, le flux convectif montre une forte modulation temporelle à la fréquence du mode propre instable.
- Pour des simulations avec $Ra \gtrsim 7 \times 10^4$, la croissance du mode acoustique instable est fortement perturbée par la convection. L'amplitude du mode subit alors des variations très importantes et demeure à des valeurs faibles. Le ratio énergétique est bien en deçà du cas précédent puisqu'il reste inférieur à 10%, et peut même tendre vers 0 aux temps longs. De même, aucune modulation temporelle n'est maintenant constatée au niveau du flux convectif. En fait, ces simulations correspondent aux phénomènes observés proches du bord rouge de la bande d'instabilité des Céphéides où la convection « tue » la propagation des modes acoustiques instables (i.e. la bande d'instabilité observée est plus étroite que celle modélisée avec l'hypothèse de la convection gelée).
- Dans une dernière catégorie de simulations, on note une synchronisation de la convection où les panaches convectifs ont tendance à adopter une répartition spatiale périodique. Ce phénomène de synchronisation, plutôt observé pour des nombres de Rayleigh faibles, semble correspondre à une adaptation de la convection « faible » au champ d'oscillations.

Enfin, à partir des différentes DNS effectuées pour l'étude du couplage convection-pulsations, nous avons aussi testé la validité de certains modèles de longueur de mélange dépendante du temps. Nous nous sommes focalisés sur la modélisation du flux convectif donnée par Stellingwerf (1982b) et par Kuhfuß (1986). En comparant directement les flux MLT à ceux calculés non-linéairement, nous avons montré que la modélisation de Stellingwerf (1982b) fournissait un meilleur accord sur le flux convectif que celle de Kuhfuß

(1986).

Perspectives

Ce travail a porté sur l'excitation des modes acoustiques par κ -mécanisme et leur couplage non-linéaire avec la convection. Il s'agit d'une première étape dans l'étude des modes p en présence de convection. L'étude du couplage convection-pulsations présentée dans le dernier chapitre a en fait distingué deux régimes montrant que la convection a une influence variable sur les modes propres d'oscillations excités par κ -mécanisme :

- Soit la convection n'a qu'un rôle perturbatif et la croissance du mode fondamental est similaire à celle observée dans le cas radiatif (simulation G8). La saturation non-linéaire qui s'en suit est malgré tout plus compliquée puisque nous n'avons pas observé une simple résonance 2 : 1 entre modes propres.
- Soit la convection tue le mode acoustique instable (simulation G6).

L'étude réalisée a néanmoins laissé de côté les simulations dans lesquelles le ratio d'énergie contenue dans les modes est intermédiaire entre ces deux comportements ($\sim 40 - 50\%$). Une étude quantitative de ce type de simulations reste donc à faire. Ce travail pourrait être l'occasion de réaliser une analyse poussée de la saturation non-linéaire dans les simulations de convection oscillante et ainsi de déterminer le rôle éventuel des modes acoustiques d'ordre $n \geq 1$ dans cette saturation. De manière générale, la problématique des mécanismes physiques sous-jacents à la saturation non-linéaire des modes acoustiques en présence de convection reste ouverte (mélange de modes propres et d'harmoniques du mode fondamental).

Ce travail de thèse s'est aussi focalisé sur les modes acoustiques *radiaux* de bas ordre (e.g. $\ell = 0$ et $n = \llbracket 0, 3 \rrbracket$). Sa généralisation au cas de l'excitation des modes acoustiques *non-radiaux* par κ -mécanisme reste donc à faire (Dziembowski 1971; Mulet-Marquis *et al.* 2007). L'étude de la stabilité des modes de degré ℓ élevé, ainsi que leur couplage éventuel avec les modes radiaux, est un travail conséquent puisqu'il nécessiterait la réalisation de simulations numériques dans des domaines à grand rapport d'aspect L_x/L_z , et donc de grandes résolutions spatiales uniquement atteignables avec un solveur implicite parallélisé (cf. perspectives numériques ci-dessous).

Une autre amélioration de ce travail passerait bien sûr par la réalisation de modèles d'équilibre plus réalistes. Nous pourrions dans un premier temps calculer la zone d'ionisation de manière consistante via la prise en compte de l'équation de Saha pour l'espèce ionisée (e.g. Hansen & Kawaler 1994). Cette approche permettrait d'obtenir une fraction ionisée présentant une évolution dynamique au cours du temps et il y aurait ainsi une véritable évolution temporelle du front d'ionisation. Le κ -mécanisme serait alors résolu de manière auto-cohérente et non plus par l'intermédiaire d'un profil de conductivité radiative *ad-hoc*. A ce titre, le Pencil Code possède déjà un module expérimental qui comprend l'ionisation de l'atome d'hydrogène. Ce module, écrit par Tobias Heinemann durant sa thèse, a déjà donné de bons résultats sur le calcul de la structure des taches solaires (i.e. structure fine de la zone de pénombre, Heinemann *et al.* 2007). Son adaptation à l'étude du κ -mécanisme reste donc à faire mais ne devrait pas poser trop de problèmes. A plus long terme, l'utilisation de tables d'opacité et d'équations d'état réalistes comme dans les codes d'évolution stellaire est envisageable.

Au-delà de l'étude des modes acoustiques, ce travail pourrait être étendu et généralisé aux modes (non-radiaux) de gravité. Par exemple, dans les naines blanches variables de type ZZ Ceti, les oscillations sont dues à des modes g excités par κ -mécanisme (zone d'ionisation de l'hydrogène). L'expérience acquise sur les modes acoustiques nous aiderait à déterminer précisément les conditions favorables à l'excitation de ces modes. Il serait en particulier intéressant de voir si le critère hydrodynamique trouvé dans le cadre des modes acoustiques (i.e. le critère sur Ψ , cf. Eq. 1.24) reste valable pour des modes non-radiaux

à longue période. Dans une seconde étape, nous pourrions réaliser le même type de DNS en partant des modèles d'équilibre les plus instables linéairement et étudier la saturation non-linéaire de cette nouvelle famille de modes.

Enfin, concernant les méthodes numériques, des améliorations de notre solveur implicite sont envisageables :

- Un premier perfectionnement consisterait à augmenter l'ordre du schéma spatial (e.g. passer de l'ordre 2 à l'ordre 4), même si le coût d'inversion des matrices en serait significativement augmenté puisque nous passerions de matrices tridiagonales à des matrices pentadiagonales dans l'inversion de l'ADI.
- Une deuxième amélioration, qui seule permettrait d'entreprendre des simulations 2-D avec de plus grandes résolutions (i.e. $\geq 512 \times 512$) voire des simulations à 3-D, nécessiterait une parallélisation MPI de l'ADI. Mais comme ce solveur est implicite, cette parallélisation est naturellement difficile puisqu'elle implique un haut niveau de communications entre les processeurs (e.g. transposition globale des points de grille). Une difficulté supplémentaire réside dans le fait que la décomposition en domaines est imposée dans le Pencil Code et la parallélisation du schéma ADI devra s'inscrire dans cette topologie.
- Enfin, nous pourrions aussi changer la géométrie du problème et passer par exemple au cas cylindrique 2-D. Le Pencil Code est en effet capable de résoudre des problèmes sur des grilles cartésienne et cylindrique (le cas sphérique étant encore expérimental). La transposition de nos modèles d'équilibre sur une grille cylindrique ne posera pas de problème mais la résolution implicite ne marchera pas en l'état. En effet, l'ADI suppose que les opérateurs différentiels soient *séparables* suivant les coordonnées spatiales (on résout successivement chaque direction). Or, le cas cylindrique fait apparaître des dérivées croisées entre les coordonnées radiale r et angulaire θ qui rendent caduque cette séparation. Une solution possible consisterait alors en l'utilisation d'un solveur itératif du type SOR.



Longueur de mélange dépendante du temps

A

Sommaire

A.1	Théorie de la longueur de mélange de Böhm-Vitense	111
A.1.1	Hypothèses de travail	111
A.1.2	Mise en équations de la MLT	112
A.2	Théories de la longueur de mélange non locales	114
A.2.1	Présentation du problème	114
A.2.2	Mise en équation	115

A.1 Théorie de la longueur de mélange de Böhm-Vitense

La théorie de la longueur de mélange a été initialement formulée dans un contexte stellaire par Vitense (1953) à partir d’une idée initiale de Prandtl (1952). Avant de rentrer dans le détail des équations, décrivons l’idée principale de cette approche.

On imagine que le plasma stellaire est composé de parcelles fluides qui peuvent se déplacer des régions chaudes vers les régions froides, et inversement, et qui sont donc capables de transporter de la chaleur sur une certaine distance. La poussée d’Archimède va faire monter les éléments convectifs plus chauds que le milieu environnant sur une certaine distance Λ au bout de laquelle ils auront perdu leur identité en se dissolvant (ils auront alors la même température et la même densité que le milieu environnant). En montant, on suppose que ces éléments convectifs vont rester à l’équilibre de pression avec le milieu. De plus, au cours de son déplacement, la parcelle va subir des pertes radiatives. Le mouvement inverse va bien entendu avoir lieu pour les éléments convectifs plus froids qui eux vont descendre. La figure A.1 schématise la théorie de la longueur de mélange. Le bilan sera donc un transport de chaleur vers l’extérieur de l’étoile que l’on quantifiera par l’intermédiaire du flux convectif. Ces idées constituent la philosophie générale de la théorie de la longueur de mélange, qui a pour but d’estimer en un point donné la valeur du flux convectif. Il s’agit en conséquence d’une théorie *locale*.

A.1.1 Hypothèses de travail

La dérivation de la théorie de la longueur de mélange qui va suivre repose sur les hypothèses suivantes :

H1 Une parcelle a une longueur caractéristique du même ordre de grandeur que la longueur de mélange Λ . En conséquence, pour un élément de fluide supposé sphérique, le rapport entre son volume \mathcal{V} et sa surface \mathcal{S} s’écrit

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{S}} = \frac{\Lambda}{3}. \quad (\text{A.1})$$

H2 La longueur de mélange Λ est beaucoup plus petite que les différentes longueurs physiques caractéristiques d'une enveloppe stellaire, comme par exemple l'échelle de pression H_p définie par :

$$H_p = - \left(\frac{d \ln P}{dr} \right)^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

H3 Une parcelle donnée est supposée être en permanence à l'équilibre de pression avec son voisinage. Cela signifie que le temps caractéristique de déplacement des éléments convectifs est beaucoup plus grand que le temps sonore, autrement dit $u \ll c_s$ où u est la vitesse caractéristique d'une parcelle et c_s la vitesse du son locale.

H4 Les différences de température et de densité entre une parcelle et son environnement sont supposées être petites.

L'ensemble de ces hypothèses constitue l'approximation de Boussinesq. Cela signifie que le fluide est supposé être *quasi-incompressible*. Nous allons voir par la suite que dans un contexte stellaire, la longueur de mélange Λ doit être du même ordre de grandeur que H_p pour obtenir des résultats satisfaisants. La MLT ne satisfait donc pas les hypothèses de travail à partir desquelles elle a été dérivée.

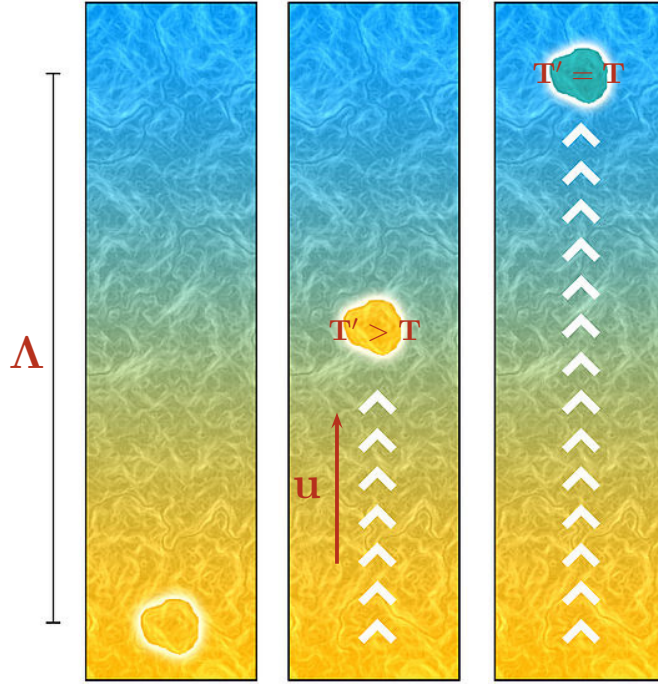


FIG. A.1: Schéma de principe de la théorie de la longueur de mélange.

A.1.2 Mise en équations de la MLT

Par définition, le flux convectif s'écrit

$$\mathcal{F}_c = \langle \rho \rangle c_p \langle u \Delta T \rangle, \quad (\text{A.3})$$

et la théorie de la longueur de mélange va chercher à estimer la valeur de ce flux en tout point de l'étoile.

A.1.2.1 Équation pour la température

Supposons un élément convectif situé au rayon r_1 à la température $T'(r_1)$, plus chaud que le milieu environnant (i.e. $T' > T$) et donc moins dense ($\rho' < \rho$). Cet élément va monter jusqu'au rayon r_2 où il aura perdu son identité en se dissolvant dans le milieu, on a donc $T'(r_2) = T(r_2)$. En supposant que les variations de température entre r_1 et r_2 sont faibles, nous pouvons écrire

$$T'(r_2) = T(r_2) = T'(r_1) + \frac{dT'}{dr}(r_2 - r_1) + \dots, \quad (\text{A.4})$$

où dT'/dr représente le gradient de température subi par l'élément convectif. On peut écrire de même pour la température du milieu ambiant

$$T(r_2) = T(r_1) + \frac{d\langle T \rangle}{dr}(r_2 - r_1) + \dots, \quad (\text{A.5})$$

En soustrayant ces deux expressions, on obtient

$$T - T' = (r_2 - r_1) \left(\frac{dT'}{dr} - \frac{dT}{dr} \right). \quad (\text{A.6})$$

On introduit la longueur de mélange $\Lambda = 2(r_2 - r_1)$ et ΔT qui est la différence de température entre l'élément convectif et le milieu ; on obtient alors

$$\Delta T = \frac{\Lambda}{2} \left(\frac{dT'}{dr} - \frac{dT}{dr} \right). \quad (\text{A.7})$$

En utilisant plutôt les notations « nabla » (i.e. $\nabla = \partial \ln T / \partial \ln P$), on a

$$\boxed{\Delta T = \frac{T}{H_p} \frac{\Lambda}{2} (\nabla - \nabla').} \quad (\text{A.8})$$

A.1.2.2 Équation pour la vitesse

Le flux convectif fait intervenir la vitesse u caractéristique des éléments convectifs. Pour estimer cette vitesse, écrivons la variation de l'énergie cinétique entre les points r_1 et r_2

$$0 - \frac{1}{2} \rho u^2 = \int_{r_1}^{r_2} g(\rho - \rho') r dr. \quad (\text{A.9})$$

Avec l'approximation Boussinesq, nous pouvons écrire

$$\frac{\rho - \rho'}{\rho} = \alpha \frac{\Delta T}{T} \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P, \quad (\text{A.10})$$

ce qui conduit à l'expression suivante

$$\frac{1}{2} u^2 = \int_{r_1}^{r_2} \alpha g \frac{\Delta T}{T} r dr = \alpha g \frac{\Delta T}{T} \frac{(r_2 - r_1)^2}{2}. \quad (\text{A.11})$$

D'où le résultat en utilisant Eq. (A.8)

$$\boxed{u = \frac{\Lambda}{2} \sqrt{\frac{\alpha g}{H_p} (\nabla - \nabla')}}. \quad (\text{A.12})$$

Dans la première théorie de la longueur de mélange, le déplacement de la cellule convective était supposé être adiabatique, ce qui revient à écrire $\nabla' = \nabla_{\text{adia}}$. Mais Böhm-Vitense (1958) a montré que les pertes radiatives des éléments convectifs pouvait significativement changer les choses et une correction a donc été ajoutée pour les prendre en compte.

A.1.2.3 Équation pour l'énergie avec pertes radiatives

Définissons le coefficient γ qui caractérise le rapport entre l'excès d'énergie d'un élément convectif et les pertes radiatives de cet élément durant sa durée de vie, soit

$$\text{Excès} = \rho c_p \Delta T \mathcal{V}, \quad (\text{A.13})$$

où \mathcal{V} est le volume de l'élément. Concernant les pertes radiatives, il est nécessaire de faire l'hypothèse d'un milieu optiquement épais où l'approximation de diffusion est valable (e.g. [Mihalas & Weibel Mihalas 1984](#)). On a alors

$$\mathcal{F}_r = -K \nabla T = -\frac{4ac}{3\kappa\rho} \nabla T. \quad (\text{A.14})$$

Cet expression du flux radiatif permet alors de déterminer les pertes radiatives

$$\text{Pertes radiatives} = \frac{4ac}{3\kappa\rho} \frac{\Delta T}{\Lambda} \mathcal{S} \tau, \quad (\text{A.15})$$

où \mathcal{S} représente la surface et τ le temps de vie de l'élément convectif. Ce temps de vie peut simplement s'écrire $\tau = \Lambda/u$, avec d'après l'hypothèse H1,

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{S}} = \frac{1}{3}. \quad (\text{A.16})$$

On obtient ainsi l'expression finale pour γ :

$$\gamma = \frac{1}{3} \frac{u\Lambda \langle \rho \rangle c_p}{K} = \frac{1}{3} \frac{u\Lambda}{\chi}, \quad (\text{A.17})$$

où $\chi \equiv K/(\rho c_p)$ est la diffusivité radiative.

Notons enfin qu'avec Eq. (A.8), la quantité d'énergie contenue dans l'élément convectif est proportionnelle à la différence $\nabla - \nabla'$. De même, les pertes radiatives sont proportionnelles au terme $\nabla' - \nabla_{\text{adia}}$ et l'on a

$$\boxed{\frac{\nabla - \nabla'}{\nabla' - \nabla_{\text{adia}}} = \frac{1}{3} \frac{u\Lambda}{\chi}}. \quad (\text{A.18})$$

A partir de Eqs. (A.8, A.12 et A.18), il est possible d'écrire une équation cubique permettant d'estimer la valeur du flux convectif.

Le modélisation que nous venons de présenter est très largement utilisée dans les codes de physique stellaire, la longueur de mélange Λ étant alors directement reliée à l'échelle de pression locale H_p via la relation $\Lambda = \alpha H_p$, où α est de l'ordre de 1 (typiquement $\alpha = 1.5$ pour les modèles solaires).

A.2 Théories de la longueur de mélange non locales

A.2.1 Présentation du problème

Rappelons que pour modéliser la turbulence, toute grandeur physique est séparée en une partie moyenne et une partie fluctuante comme

$$x = \langle x \rangle + x', \quad (\text{A.19})$$

où $\langle x \rangle$ représente une grandeur moyennée obtenue en réalisant une moyenne horizontale et x' désigne le terme associé à la fluctuation. En coordonnées sphériques, la moyenne horizontale s'écrit par exemple

$$\langle x \rangle(r, t) = \int x(r, \theta, \phi, t) \frac{d\Omega}{4\pi} \quad \text{avec} \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi. \quad (\text{A.20})$$

Cette définition entraîne les différentes propriétés suivantes qui seront utiles par la suite :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla} x \rangle &= \vec{\nabla} \langle x \rangle, \\ \langle \text{div} \vec{x} \rangle &= \text{div} \langle \vec{x} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle a'b' \rangle,$$

où a et b peuvent être des scalaires, des vecteurs ou des tenseurs d'ordre 2.

A.2.2 Mise en équation

Les équations de l'hydrodynamique peuvent s'écrire sous la forme générale suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0, \\ \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \text{div} \vec{\bar{\sigma}}, \\ \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right] = \rho \epsilon + \rho \vec{u} \cdot \vec{g} - \text{div} \left(\vec{\mathcal{F}}_r + p \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\bar{\sigma}} \right), \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

où e est l'énergie interne, $\vec{\bar{\sigma}}$ représente le tenseur des contraintes, ϵ le taux de production d'énergie par unité de masse et $\vec{\mathcal{F}}_r$ le flux radiatif.

A.2.2.1 Équation de continuité

Nous allons dans un premier temps moyenner l'équation de continuité exprimée dans le système (A.22), soit

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \text{div}(\langle \rho \rangle \langle \vec{u} \rangle + \langle \rho' \vec{u}' \rangle) = 0. \quad (\text{A.23})$$

Afin de simplifier notablement les équations obtenues, nous allons appliquer *l'approximation anélastique* qui va nous permettre d'éliminer tous les termes à hautes fréquences de notre problème, comme par exemple les ondes sonores qui se retrouvent ainsi filtrées (Gough 1969; Kuhfuß 1986; Gehmeyr & Winkler 1992b; Dintrans & Rieutord 2001). Cette approximation ne sera valable que si l'on se cantonne à des nombres de Mach faibles. Cela revient à considérer les fluctuations des différentes grandeurs physiques comme des perturbations des grandeurs moyennées (sauf pour la vitesse \vec{u}'). En conséquence, tous les termes d'ordre 2 et plus seront négligés à part ceux contenant \vec{u}' . Dans ce cadre là, l'équation de continuité s'écrit simplement

$$\boxed{\text{div}(\langle \rho \rangle \vec{u}') = 0.} \quad (\text{A.24})$$

A.2.2.2 Équation de la quantité de mouvement

Pour l'équation de la quantité de mouvement, la démarche est la même que précédemment. Il faut prendre la moyenne horizontale de l'équation générale de la quantité de mouvement dans le système (A.22) et utiliser les propriétés (A.21). Tous calculs faits, on obtient alors

$$\frac{\partial \langle \vec{u} \rangle}{\partial t} + \left(\langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{\nabla} \right) \langle \vec{u} \rangle = -\frac{1}{\langle \rho \rangle} \vec{\nabla} \langle p \rangle + \vec{g} + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left\langle \overrightarrow{\text{div}} \overline{\vec{\sigma}} \right\rangle - \left\langle \left(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}' \right\rangle. \quad (\text{A.25})$$

Le dernier terme du membre du gauche peut s'arranger puisque l'on a

$$\rho \left(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}' = \rho \overline{\vec{\nabla} \vec{u}'} \cdot \vec{u}' = \overrightarrow{\text{div}} \left(\rho \vec{u}' \otimes \vec{u}' \right) - \vec{u}' \text{div} \rho \vec{u}', \quad (\text{A.26})$$

où \otimes désigne le produit tensoriel. Avec Eq. (A.24), on obtient l'équation de la quantité de mouvement finale

$$\boxed{\frac{\partial \langle \vec{u} \rangle}{\partial t} + \left(\langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{\nabla} \right) \langle \vec{u} \rangle = -\frac{1}{\langle \rho \rangle} \vec{\nabla} \langle p \rangle + \vec{g} + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left\langle \overrightarrow{\text{div}} \left(\overline{\vec{\sigma}} + \overline{\vec{\mathcal{R}}} \right) \right\rangle}, \quad (\text{A.27})$$

où $\overline{\vec{\mathcal{R}}} = -\langle \rho \rangle \vec{u}' \otimes \vec{u}'$ est le tenseur de Reynolds.

A.2.2.3 Équation d'énergie

Pour l'équation d'énergie, on prend là encore la moyenne de l'équation générale du système (A.22). Pour une meilleure lisibilité, on notera par la suite

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{\nabla}. \quad (\text{A.28})$$

et on a

$$\begin{aligned} D_t \left(\langle e \rangle + \left\langle \frac{u'^2}{2} \right\rangle + \underbrace{\left\langle \frac{\langle u \rangle^2}{2} \right\rangle}_{(4)} \right) &+ \underbrace{\left\langle \left(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{u'^2}{2} \right\rangle}_{(1)} + \underbrace{\left\langle \left(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \right) \left(\vec{u}' \cdot \langle \vec{u} \rangle \right) \right\rangle}_{(2)} + \underbrace{\left\langle \vec{u}' \cdot \vec{\nabla} e' \right\rangle}_{(3)} \\ &= \langle e \rangle + \langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{g} + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \text{div} (\vec{u} \cdot \overline{\vec{\sigma}}) \rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \text{div} (p \langle \vec{u} \rangle + p' \vec{u}') \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\rho} \text{div} (\vec{u}' \cdot \overline{\vec{\sigma}}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Définissons l'énergie turbulente moyenne

$$\boxed{\mathcal{E}_t = \left\langle \frac{u'^2}{2} \right\rangle}. \quad (\text{A.30})$$

avec

$$\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} \frac{u'^2}{2} = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left[\text{div} \left(\langle \rho \rangle \frac{u'^2}{2} \vec{u}' \right) - \frac{u'^2}{2} \underbrace{\text{div}(\langle \rho \rangle \vec{u}')}_{=0} \right]. \quad (\text{A.31})$$

On définit alors le flux turbulent

$$\boxed{\vec{\mathcal{F}}_t = \left\langle \frac{1}{2} \langle \rho \rangle u'^2 \vec{u}' \right\rangle}, \quad (\text{A.32})$$

et on en déduit que

$$(1) = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div} \vec{\mathcal{F}}_t. \quad (\text{A.33})$$

Pour le terme (2), il est nécessaire de transformer l'expression comme suit

$$\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} (\langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{u}') = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left[\text{div} \left(\langle \rho \rangle (\langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{u}') \vec{u}' \right) + (\vec{u}' \cdot \langle \vec{u} \rangle) \underbrace{\text{div}(\langle \rho \rangle \vec{u}')}_{=0} \right]. \quad (\text{A.34})$$

En utilisant la définition du produit tensoriel, on montre que

$$(2) = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left\langle \text{div} \left(\overline{\overline{\mathcal{R}}} \cdot \langle \vec{u} \rangle \right) \right\rangle. \quad (\text{A.35})$$

On peut ensuite combiner (3) avec $\text{div}(p' \vec{u}')$ présent dans Eq. (A.29) puisque

$$\vec{u}' \cdot \vec{\nabla} e' = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left[\text{div} (\langle \rho \rangle e' \vec{u}') - e' \underbrace{\text{div} (\langle \rho \rangle \vec{u}')}_{=0} \right]. \quad (\text{A.36})$$

Introduisons le flux convectif défini par

$$\boxed{\vec{\mathcal{F}}_c = \langle \langle \rho \rangle h' \vec{u}' \rangle}, \quad (\text{A.37})$$

où h désigne l'enthalpie par unité de masse avec

$$h' = e' + \frac{p'}{\langle \rho \rangle}. \quad (\text{A.38})$$

On obtient alors

$$(3) + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \langle \text{div}(p' \vec{u}') \rangle = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div} \vec{\mathcal{F}}_c. \quad (\text{A.39})$$

Poursuivant plus avant la simplification de Eq. (A.29), on peut multiplier Eq. (A.27) par $\langle \vec{u} \rangle$ et transformer les expressions du membre de droite de la manière suivante

$$\begin{aligned} (4) = \frac{1}{2} D_t \langle u \rangle^2 &= \langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{g} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div}(p \langle \vec{u} \rangle) + \frac{1}{\langle \rho \rangle} p \text{div} \langle \vec{u} \rangle + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left\langle \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathcal{R}}} \right\rangle \cdot \langle \vec{u} \rangle \\ &+ \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div}(\overline{\overline{\sigma}} \cdot \langle \vec{u} \rangle) - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\nabla \langle u \rangle}}. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

L'équation d'énergie s'écrit donc en définitive

$$\boxed{D_t(e + \mathcal{E}_t) = - \frac{p}{\langle \rho \rangle} \text{div} \langle \vec{u} \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div} \left(\vec{\mathcal{F}}_r + \vec{\mathcal{F}}_t + \vec{\mathcal{F}}_c - \langle \vec{u}' \cdot \overline{\overline{\sigma}} \rangle \right) + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left(\langle \overline{\overline{\mathcal{R}}} \rangle + \overline{\overline{\sigma}} \right) : \overline{\overline{\nabla \langle u \rangle}}.} \quad (\text{A.41})$$

où l'on a utilisé le fait que $\text{div}(\overline{\overline{\mathcal{R}}} \cdot \langle \vec{u} \rangle) = \langle \vec{u} \rangle \cdot \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\mathcal{R}}} + \overline{\overline{\nabla \langle u \rangle}} : \overline{\overline{\mathcal{R}}}$.

A.2.2.4 Équation pour l'énergie turbulente

En multipliant l'équation générale de la quantité de mouvement par \vec{u}' et en prenant la moyenne horizontale du résultat obtenu, on peut établir une équation pour l'énergie turbulente \mathcal{E}_t donnée par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}_t}{\partial t} + \underbrace{\left\langle \left(\overline{\nabla u'} \cdot \langle \vec{u} \rangle \right) \cdot \vec{u}' \right\rangle}_{(1)} + \underbrace{\left\langle \left(\overline{\nabla u'} \cdot \vec{u}' \right) \cdot \vec{u}' \right\rangle}_{(2)} + \underbrace{\left\langle \left(\overline{\nabla \langle u \rangle} \cdot \vec{u}' \right) \cdot \vec{u}' \right\rangle}_{(3)} \\
= - \left\langle \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right)' \cdot \vec{u}' \right\rangle + \frac{1}{\langle \rho \rangle} \underbrace{\left\langle \overrightarrow{\text{div}} \vec{\sigma} \cdot \vec{u}' \right\rangle}_{(4)}.
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Le terme (1) peut simplement s'écrire

$$(1) = \langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{\nabla} \mathcal{E}_t. \tag{A.43}$$

De même, on a

$$\vec{u}' \cdot \left(\overline{\nabla u'} \cdot \vec{u}' \right) = \vec{u}' \cdot \left[\vec{\nabla} \frac{u'^2}{2} + \underbrace{\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}' \right) \wedge \vec{u}'}_{\perp \vec{u}'} \right]. \tag{A.44}$$

ce qui, couplé avec l'équation de continuité (A.24), donne

$$\vec{u}' \cdot \left(\overline{\nabla u'} \cdot \vec{u}' \right) = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left[\text{div} \left(\langle \rho \rangle \frac{u'^2}{2} \vec{u}' \right) - \frac{u'^2}{2} \underbrace{\text{div} (\langle \rho \rangle \vec{u}')}_{=0} \right]. \tag{A.45}$$

Le terme (2) s'écrit alors finalement

$$(2) = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div} \vec{\mathcal{F}}_t. \tag{A.46}$$

En notant que

$$\vec{u}' \cdot \left(\overline{\nabla \langle u \rangle} \cdot \vec{u}' \right) = \overline{\nabla \langle u \rangle} : (\vec{u}' \otimes \vec{u}'), \tag{A.47}$$

le terme (3) devient quant à lui

$$(3) = - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left\langle \overline{\nabla \langle u \rangle} : \overline{\mathcal{R}} \right\rangle. \tag{A.48}$$

Enfin, le terme (4) se développe comme suit

$$(4) = \left[\text{div} \langle \vec{\sigma} \cdot \vec{u}' \rangle - \left\langle \vec{\sigma} : \overline{\nabla u'} \right\rangle \right]. \tag{A.49}$$

L'équation finale pour l'énergie cinétique turbulente prend donc la forme suivante :

$$\boxed{D_t \mathcal{E}_t = - \underbrace{\left\langle \vec{u}' \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right)' \right\rangle}_{\mathcal{S}_t} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left\langle \vec{\sigma} : \overline{\nabla u'} - \overline{\mathcal{R}} : \overline{\nabla \langle u \rangle} \right\rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{div} \left(\vec{\mathcal{F}}_t - \langle \vec{u}' \cdot \vec{\sigma} \rangle \right)}. \tag{A.50}$$

Calcul de la matrice adjointe

B

Sommaire

B.1	Définition	119
B.2	Propriétés	119
B.2.1	Cas auto-adjoint	119
B.2.2	Cas où $H = a$	119
B.2.3	Cas où $H = D$	120
B.2.4	Cas où $H = aD$	120
B.2.5	Cas où $H = D^2$	120
B.3	La relation de biorthogonalité	121
B.4	Détails du calcul des termes de la matrice adjointe	121

B.1 Définition

Munissons nous du produit sesquilinéaire standard, tel que, pour deux vecteurs x et y , on a

$$\langle x, y \rangle = \int_0^L x^\dagger y dz, \quad (\text{B.1})$$

où la notation \dagger signifie la transposée conjuguée. On définit alors de manière univoque l'opérateur adjoint H^\dagger , tel que (e.g [Löwdin 1983](#))

$$\forall(x, y) \quad \langle x, Hy \rangle = \langle H^\dagger x, y \rangle. \quad (\text{B.2})$$

B.2 Propriétés

B.2.1 Cas auto-adjoint

L'opérateur H est dit auto-adjoint (ou hermitien) si et seulement si $H^\dagger = H$.

B.2.2 Cas où $H = a$

Si $a \in \mathbb{C}$ (a peut être variable en fonction de z), et $H = a$, alors

$$\langle x, ay \rangle = \langle a^* x, y \rangle, \quad (\text{B.3})$$

où a^* est le nombre complexe conjugué de a .

B.2.3 Cas où $H = D$

Si H est un opérateur de dérivation alors on peut écrire avec une intégration par partie

$$\begin{aligned}
 \langle x, Dy \rangle &= \int_0^L x^\dagger \frac{dy}{dz} dz, \\
 &= [x^\dagger y]_0^L - \int_0^L \frac{dx^\dagger}{dz} y dz, \\
 &= [x^\dagger y]_0^L - \langle Dx, y \rangle.
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Si $[x^\dagger y]_0^L$ s'annule (selon les conditions aux limites choisies), on a simplement

$$\boxed{\langle x, Dy \rangle = -\langle Dx, y \rangle.} \tag{B.5}$$

B.2.4 Cas où $H = aD$

Avec $a \in \mathbb{C}$ (variable complexe), on a

$$\begin{aligned}
 \langle x, aDy \rangle &= \int_0^L x^\dagger a \frac{dy}{dz} dz, \\
 &= [x^\dagger ay]_0^L - \int_0^L \frac{dax^\dagger}{dz} y dz, \\
 &= [x^\dagger ay]_0^L - \langle (Da^* + a^*D)x, y \rangle.
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Si $[x^\dagger ay]_0^L$ s'annule (toujours selon les conditions aux limites choisies), on obtient

$$\boxed{\langle x, aDy \rangle = -\langle (Da^* + a^*D)x, y \rangle.} \tag{B.7}$$

B.2.5 Cas où $H = D^2$

Si H est l'opérateur de dérivée seconde, alors on a avec deux intégrations par partie à calculer :

$$\begin{aligned}
 \langle x, D^2y \rangle &= \int_0^L x^\dagger \frac{d^2y}{dz^2} dz, \\
 &= \left[x^\dagger \frac{dy}{dz} \right]_0^L - \int_0^L \frac{dx^\dagger}{dz} \frac{dy}{dz} dz, \\
 &= \left[x^\dagger \frac{dy}{dz} \right]_0^L - \left[\frac{dx^\dagger}{dz} y \right]_0^L + \int_0^L \frac{d^2x^\dagger}{dz^2} y dz, \\
 &= \left[x^\dagger \frac{dy}{dz} \right]_0^L - \left[\frac{dx^\dagger}{dz} y \right]_0^L + \langle D^2x, y \rangle.
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Si $\left[x^\dagger \frac{dy}{dz} \right]_0^L - \left[\frac{dx^\dagger}{dz} y \right]_0^L$ s'annule, alors

$$\boxed{\langle x, D^2y \rangle = \langle D^2x, y \rangle.} \tag{B.9}$$

B.3 La relation de biorthogonalité

Soit H un opérateur, λ_i ses valeurs propres et ϕ_i ses vecteurs propres avec

$$H\phi_i = \lambda_i\phi_i. \quad (\text{B.10})$$

Soit H^\dagger l'opérateur adjoint de H dont les vecteurs propres ψ_i et les valeurs propres μ_i vérifient

$$H^\dagger\psi_i = \mu_i\psi_i. \quad (\text{B.11})$$

Multiplions scalairement à gauche par ϕ_j , soit

$$\langle \phi_j, H^\dagger\psi_i \rangle = \mu_i \langle \phi_j, \psi_i \rangle. \quad (\text{B.12})$$

Mais d'après la définition de l'opérateur adjoint, on a

$$\langle H\phi_j, \psi_i \rangle = \mu_i \langle \phi_j, \psi_i \rangle, \quad (\text{B.13})$$

d'où

$$\boxed{(\lambda_j^* - \mu_i) \langle \phi_j, \psi_i \rangle = 0.} \quad (\text{B.14})$$

Cette relation, dite de *biorthogonalité*, indique qu'un vecteur propre adjoint est orthogonal à tous les vecteurs propres de H , sauf celui qui a une valeur propre conjuguée. Il est alors possible de normaliser les deux familles de vecteurs afin d'imposer

$$\langle \phi_j, \psi_i \rangle = \delta_{ij}. \quad (\text{B.15})$$

B.4 Détails du calcul des termes de la matrice adjointe

La matrice adjointe A^\dagger de notre opérateur d'oscillations A dérivé dans le §4.2 (cf. Eq. 4.3) va être construite à partir de la définition de la matrice adjointe

$$\langle \psi_2, A\psi_1 \rangle = \langle A^\dagger\psi_2, \psi_1 \rangle. \quad (\text{B.16})$$

Cette équation peut s'écrire

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} T_2'^* & u_{x_2}^* & u_{z_2}^* & R_2^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} T_1' \\ u_{x_1} \\ u_{z_1} \\ R_1 \end{pmatrix} dz = \int_0^1 \begin{pmatrix} T_1' & u_{x_1} & u_{z_1} & R_1 \end{pmatrix} A^\dagger \begin{pmatrix} T_2'^* \\ u_{x_2}^* \\ u_{z_2}^* \\ R_2^* \end{pmatrix} dz, \quad (\text{B.17})$$

où $(T_1', u_{x_1}, u_{z_1}, R_1)$ et $(T_2', u_{x_2}, u_{z_2}, R_2)$, sont respectivement un vecteur propre régulier et un vecteur propre adjoint. Il est alors possible de calculer terme à terme les éléments de la matrice A^\dagger .

B.4.0.1 Calcul de A_{11}^\dagger

A_{11}^\dagger découle de l'intégration de

$$I = \langle T_2', HT_1' \rangle = \int_0^1 T_2'^* \frac{\gamma}{\rho_0} [K_0(D^2 - k_x^2) + 2DK_0D + D^2K_0] T_1' dz. \quad (\text{B.18})$$

Cette intégrale va être scindée en plusieurs parties afin de faciliter son calcul, soit

$$I = \gamma \left[\underbrace{\int_0^1 \frac{T_2'^* K_0}{\rho_0} \frac{dT_1'}{dz^2} dz}_{(1)} + 2 \underbrace{\int_0^1 \frac{T_2'^*}{\rho_0} \frac{dK_0}{dz} \frac{dT_1'}{dz} dz}_{(2)} + \underbrace{\int_0^1 \frac{T_2'^*}{\rho_0} \left(-k_x^2 + \frac{d^2 K_0}{dz^2} \right) T_1' dz}_{(a)} \right]. \quad (\text{B.19})$$

Détaillons le calcul des termes (1) et (2), par intégration par parties.

$$\begin{aligned} (1) &= \left[\frac{T_2'^* K_0}{\rho_0} \frac{dT_1'}{dz} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dz} \left(\frac{T_2'^* K_0}{\rho_0} \right) \frac{dT_1'}{dz} dz, \\ &= \left[\frac{T_2'^* K_0}{\rho_0} \frac{dT_1'}{dz} \right]_0^1 - \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{T_2'^* K_0}{\rho_0} \right) T_1' \right]_0^1 + \underbrace{\int_0^1 \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{T_2'^* K_0}{\rho_0} \right) T_1' dz}_{(b)}, \\ (2) &= 2 \left[\frac{T_2'^*}{\rho_0} \frac{dK_0}{dz} T_1' \right]_0^1 - 2 \underbrace{\int_0^1 \frac{d}{dz} \left(\frac{T_2'^*}{\rho_0} \frac{dK_0}{dz} \right) T_1' dz}_{(c)}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Les termes intégrés (entre crochets) constituent les conditions aux limites du problème adjoint et sont détaillés dans le §4.2. Les termes (a), (b) et (c) peuvent être explicités plus finement.

$$(b) = \frac{K_0}{\rho_0} D^2 T_2'^* + 2D \left(\frac{K_0}{\rho_0} \right) DT_2'^* + T_2'^* D^2 \left(\frac{K_0}{\rho_0} \right), \quad (\text{B.21})$$

or

$$\boxed{D \left(\frac{K_0}{\rho_0} \right) = \frac{DK_0}{\rho_0} - \frac{K_0}{\rho_0} D \ln \rho_0,} \quad (\text{B.22})$$

et donc

$$D^2 \left(\frac{K_0}{\rho_0} \right) = \frac{D^2 K_0}{\rho_0} - 2 \frac{DK_0}{\rho_0} D \ln \rho_0 - \frac{K_0}{\rho_0} D^2 \ln \rho_0 + \frac{K_0}{\rho_0} (D \ln \rho_0)^2. \quad (\text{B.23})$$

D'où, en définitive

$$\begin{aligned}
(a) &= \frac{1}{\rho_0} \left(-k_x^2 + \underbrace{D^2 K_0}_{\star} \right) T_2'^*, \\
(b) &= \frac{K_0}{\rho_0} D^2 T_2'^* + 2 \left(\underbrace{\frac{DK_0}{\rho_0}}_{\diamond} - \frac{K_0}{\rho_0} D \ln \rho_0 \right) DT_2'^* \\
&\quad + \left[\underbrace{\frac{D^2 K_0}{\rho_0}}_{\star} - 2 \underbrace{\frac{DK_0}{\rho_0} D \ln \rho_0}_{\bullet} - \frac{K_0}{\rho_0} D^2 \ln \rho_0 + \frac{K_0}{\rho_0} (D \ln \rho_0)^2 \right] T_2'^*, \\
(c) &= \underbrace{-2 \frac{DK_0}{\rho_0} DT_2'^*}_{\diamond} - 2 \left(\underbrace{\frac{D^2 K_0}{\rho_0}}_{\star} - \underbrace{\frac{DK_0 D \ln \rho_0}{\rho_0}}_{\bullet} \right) T_2'^*.
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Lors de la sommation des trois contributions (a), (b) et (c), les termes avec une marque se simplifient permettant ainsi de déterminer l'expression finale de A_{11}^\dagger :

$$\boxed{A_{11}^\dagger = \frac{\gamma K_0}{\rho_0} \{ D^2 - 2D \ln \rho_0 D + [-k_x^2 - D^2 \ln \rho_0 + (D \ln \rho_0)^2] \}.} \tag{B.25}$$

B.4.0.2 Calcul de A_{12}^\dagger

A_{12}^\dagger découle de l'intégration du terme

$$\langle u_{x_2}, HT_1' \rangle = \int_0^1 u_{x_2}^* (-R^* i k_x) T_1' dz. \tag{B.26}$$

D'après Eq. (B.3), on obtient donc

$$\langle u_{x_2}, HT_1' \rangle = \langle H^* u_{x_2}, T_1' \rangle, \tag{B.27}$$

d'où le résultat immédiat

$$\boxed{A_{12}^\dagger = R^* i k_x.} \tag{B.28}$$

B.4.0.3 Calcul de A_{13}^\dagger

A_{13}^\dagger découle de l'intégration de

$$\langle u_{z_2}, HT_1' \rangle = \int_0^1 u_{z_2}^* [-R^* (D + D \ln \rho_0)] T_1' dz. \tag{B.29}$$

Avec Eq. (B.5), on peut écrire

$$\langle u_{z_2}, HT_1' \rangle = \langle R^* (D - D \ln \rho_0) u_{z_2}, T_1' \rangle - R^* [u_{z_2}^* T_1']_0^1. \tag{B.30}$$

Le terme intégré (entre crochets) est éliminé avec les conditions aux limites du problème adjoint et on en déduit que

$$\boxed{A_{13}^\dagger = R^* (D - D \ln \rho).} \tag{B.31}$$

B.4.0.4 Calcul de A_{14}^\dagger

A_{14}^\dagger découle de l'intégration de

$$\langle R_2, HT_1' \rangle = 0, \quad (\text{B.32})$$

car $H = 0$ d'après Eq. (4.3) donc on a simplement

$$\boxed{A_{14}^\dagger = 0.} \quad (\text{B.33})$$

B.4.0.5 Calcul de A_{21}^\dagger

A_{21}^\dagger découle de l'intégration de

$$\langle T_2', Hu_{x_1} \rangle = \int_0^1 T_2'^* [-(\gamma - 1)T_0 ik_x] u_{x_1} dz. \quad (\text{B.34})$$

Avec Eq. (B.3), on obtient donc

$$\boxed{A_{21}^\dagger = (\gamma - 1)T_0 ik_x.} \quad (\text{B.35})$$

B.4.0.6 Calcul de A_{22}^\dagger

A_{22}^\dagger découle de l'intégration de

$$\langle u_{x_2}, Hu_{x_1} \rangle = \int_0^1 u_{x_2}^* \left[\frac{\nu}{3} (3D^2 - 4k_x^2 + 2D \ln \rho_0 D) \right] u_{x_1} dz. \quad (\text{B.36})$$

Avec Eqs. (B.5, B.7, B.9), on a alors

$$\begin{aligned} \langle u_{x_2}, Hu_{x_1} \rangle &= \left\langle \frac{\nu}{3} [3D^2 - 4k_x^2 - 3(D \ln \rho_0 D + D^2 \ln \rho_0)] u_{x_2}, u_{x_1} \right\rangle \\ &+ \nu \left[u_{x_2}^* \underbrace{\frac{du_{x_1}}{dz}}_{=0} - \frac{du_{x_2}^*}{dz} u_{x_1} \right]_0^1 + \nu \left[u_{x_2}^* \frac{d \ln \rho_0}{dz} u_{x_1} \right]_0^1. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Les termes intégrés (entre crochets) sont là encore utilisés pour déterminer les conditions aux limites du problème adjoint (e.g. un terme se simplifie du fait de la condition limite sur u_{x_1}). L'expression finale pour A_{22}^\dagger est donc :

$$\boxed{A_{22}^\dagger = \frac{\nu}{3} [3D^2 - 4k_x^2 - 3(D \ln \rho_0 D + D^2 \ln \rho_0)] .} \quad (\text{B.38})$$

B.4.0.7 Calcul de A_{23}^\dagger

A_{23}^\dagger découle de l'intégration de

$$\langle u_{z_2}, Hu_{x_1} \rangle = \int_0^1 u_{z_2}^* \left[\frac{\nu}{3} ik_x (D - 2D \ln \rho_0) \right] u_{x_1} dz. \quad (\text{B.39})$$

Avec Eqs. (B.3, B.5), on obtient donc

$$\langle u_{z_2}, Hu_{x_1} \rangle = \left\langle \frac{\nu}{3} ik_x (D + 2D \ln \rho_0) u_{z_2}, u_{x_1} \right\rangle + \frac{\nu}{3} ik_x [u_{z_2}^* u_{x_1}]_0^1. \quad (\text{B.40})$$

Le terme entre crochet donne la condition aux limites pour u_{z_2} et on a

$$\boxed{A_{23}^\dagger = \frac{\nu}{3} i k_x (D + 2D \ln \rho_0).} \quad (\text{B.41})$$

B.4.0.8 Calcul de A_{24}^\dagger

A_{24}^\dagger découle de l'intégration du terme

$$\langle R_2, H u_{x_1} \rangle = \int_0^1 R_2^*(-i k_x) u_{x_1} dz. \quad (\text{B.42})$$

D'après Eq. (B.3), on obtient donc

$$\langle R_2, H u_{x_1} \rangle = \langle H^* R_2, u_{x_1} \rangle, \quad (\text{B.43})$$

d'où le résultat

$$\boxed{A_{24}^\dagger = i k_x.} \quad (\text{B.44})$$

B.4.0.9 Calcul de A_{31}^\dagger

A_{31}^\dagger découle de l'intégration du terme

$$\langle T'_2, H u_{z_1} \rangle = \int_0^1 T_2'^* \left[\frac{F_{\text{bot}}}{K_0} - (\gamma - 1) T_0 D \right] u_{z_1} dz. \quad (\text{B.45})$$

D'après Eqs. (B.3, B.7), on obtient donc

$$\langle T'_2, H u_{z_1} \rangle = \left\langle \left[(\gamma - 1) T_0 D + (2 - \gamma) \frac{F_{\text{bot}}}{K_0} \right] T'_2, u_{z_1} \right\rangle - \underbrace{(\gamma - 1) [T_2'^* T_0 u_{z_1}]_0^1}_{=0}. \quad (\text{B.46})$$

Le terme entre crochets s'annule du fait des conditions aux limites pour u_{z_1} et finalement

$$\boxed{A_{31}^\dagger = (\gamma - 1) T_0 D + (2 - \gamma) \frac{F_{\text{bot}}}{K_0}.} \quad (\text{B.47})$$

B.4.0.10 Calcul de A_{32}^\dagger

A_{32}^\dagger découle de l'intégration du terme

$$\langle u_{x_2}, H u_{z_1} \rangle = \int_0^1 u_{x_2}^* \frac{\nu}{3} i k_x (D + 3D \ln \rho_0) u_{z_1} dz. \quad (\text{B.48})$$

Avec Eq. (B.5), on obtient donc

$$\langle u_{x_2}, H u_{z_1} \rangle = \left\langle \frac{\nu}{3} i k_x (D - 3D \ln \rho_0) u_{x_2}, u_{z_1} \right\rangle + \underbrace{\frac{\nu}{3} i k_x [u_{x_2}^* u_{z_1}]_0^1}_{=0}. \quad (\text{B.49})$$

Le terme intégré s'annule du fait de la condition sur u_{z_1} (murs rigides dans le problème régulier), soit

$$\boxed{A_{32}^\dagger = \frac{\nu}{3} i k_x (D - 3D \ln \rho_0).} \quad (\text{B.50})$$

B.4.0.11 Calcul de A_{33}^\dagger

A_{33}^\dagger découle de l'intégration du terme

$$\langle u_{z_2}, H u_{z_1} \rangle = \int_0^1 u_{z_2}^* \frac{\nu}{3} (4D^2 - 3k_x^2 + 4D \ln \rho_0 D) u_{z_1} dz. \quad (\text{B.51})$$

Le calcul de ce terme est le même que pour A_{22}^\dagger , et on obtient donc avec Eqs. (B.7, B.9)

$$\begin{aligned} \langle u_{z_2}, H u_{z_1} \rangle &= \left\langle \frac{\nu}{3} [4D^2 - 3k_x^2 - 4(D \ln \rho_0 + D^2 \ln \rho_0)] u_{z_2}, u_{z_1} \right\rangle \\ &\quad + \frac{4\nu}{3} \left[u_{z_2}^* \frac{du_{z_1}}{dz} - \frac{du_{z_2}^*}{dz} u_{z_1} \right]_0^1 + \frac{4\nu}{3} \left[u_{z_2}^* \frac{d \ln \rho_0}{dz} u_{z_1} \right]_0^1. \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Les termes intégrés permettent une fois de plus de déterminer les conditions aux limites du problème adjoint et le résultat final pour A_{33}^\dagger s'écrit

$$\boxed{A_{33}^\dagger = 4D^2 - 3k_x^2 - 4(D \ln \rho_0 + D^2 \ln \rho_0)}. \quad (\text{B.53})$$

B.4.0.12 Calcul de A_{34}^\dagger

A_{34}^\dagger découle de l'intégration du terme

$$\langle R_2, H u_{z_1} \rangle = \int_0^1 R_2^* \frac{\nu}{3} (-D - D \ln \rho_0) u_{z_1} dz. \quad (\text{B.54})$$

Avec Eqs. (B.5, B.7), on peut alors écrire

$$\langle R_2, H u_{z_1} \rangle = \langle (D - D \ln \rho_0) R_2, u_{z_1} \rangle + \underbrace{[R_2^* u_{z_1}]_0^1}_{=0}. \quad (\text{B.55})$$

Le terme intégré s'annule du fait de la condition aux limites pour u_{z_1} et on en déduit alors

$$\boxed{A_{34}^\dagger = D - D \ln \rho_0}. \quad (\text{B.56})$$

B.4.0.13 Calcul de A_{41}^\dagger

A_{41}^\dagger découle de l'intégration de

$$\langle T_2', H R_1 \rangle = 0, \quad (\text{B.57})$$

car $H = 0$ d'après Eq. (4.3), d'où le résultat

$$\boxed{A_{41}^\dagger = 0}. \quad (\text{B.58})$$

B.4.0.14 Calcul de A_{42}^\dagger

A_{42}^\dagger découle de l'intégration de

$$\langle u_{x_2}, H R_1 \rangle = \int_0^1 u_{x_2}^* (-R^* i k_x T_0) R_1 dz. \quad (\text{B.59})$$

Avec Eq. (B.3), on peut alors écrire

$$\langle u_{x_2}, HR_1 \rangle = \langle R^* i k_x T_0 u_{x_2}, R_1 \rangle, \quad (\text{B.60})$$

d'où

$$\boxed{A_{42}^\dagger = R^* i k_x T_0.} \quad (\text{B.61})$$

B.4.0.15 Calcul de A_{43}^\dagger

A_{43}^\dagger découle de l'intégration de

$$\langle u_{z_2}, HR_1 \rangle = \int_0^1 u_{x_2}^* (-R^* T_0 D) R_1 dz. \quad (\text{B.62})$$

Avec Eq. (B.7), on peut alors écrire

$$\langle u_{z_2}, HR_1 \rangle = \langle R^* (T_0 D + D T_0) u_{z_2}, R_1 \rangle + R^* [u_{z_2}^* T_0 R_2]_0^1. \quad (\text{B.63})$$

Le terme entre crochets intervient dans la dérivation des conditions aux limites et on a simplement

$$\boxed{A_{43}^\dagger = R^* (T_0 D + D T_0).} \quad (\text{B.64})$$

B.4.0.16 Calcul de A_{44}^\dagger

A_{44}^\dagger découle de l'intégration de

$$\langle R_2, HR_1 \rangle = 0, \quad (\text{B.65})$$

car $H = 0$ d'après Eq. (4.3), d'où le résultat

$$\boxed{A_{44}^\dagger = 0.} \quad (\text{B.66})$$

◻◻◻

Liste des figures

1.1	Relation période-luminosité	15
1.2	Bande d'instabilité des Céphéides	17
1.3	Position des Céphéides parmi les étoiles variables	19
1.4	Bande d'instabilité : cas d'une étoile chaude	24
1.5	Dans la bande d'instabilité	25
1.6	Bande d'instabilité : cas d'une étoile froide	26
1.7	Courbe de lumière : observations et modèle	36
1.8	Modèle de la bande d'instabilité des Céphéides	37
2.1	Profil de conductivité radiative	43
2.2	Schéma de principe du modèle radiatif	44
2.3	Champs d'équilibre	47
2.4	Exemple de vecteur propre	49
2.5	Spectre de convergence d'un mode	49
2.6	Étude paramétrique $T_{\text{bump}} - \mathcal{A}$	50
2.7	Étude paramétrique $T_{\text{bump}} - \sigma$	51
2.8	Étude paramétrique $T_{\text{bump}} - e$	51
2.9	Intégrale de travail	53
3.1	Profils de diffusivité	56
3.2	Précision de l'ADI sur les séries temporelles	64
3.3	Précision de l'ADI sur les flux	65
4.1	Comparaison DNS et analyse de stabilité linéaire	68
4.2	Saturation non-linéaire	69
4.3	DNS dans l'espace de Fourier	70
4.4	Vecteur propre adjoint	75
4.5	Amplitudes des modes $c_n(t)$	76
4.6	Diagrammes de phase	77
4.7	Contenu énergétique des modes	78
4.8	Progression d'Hertzsprung de Bono <i>et al.</i>	79
4.10	Phase du bump des courbes de luminosité	82
4.11	Progression d'Hertzsprung	83
5.1	Schéma de principe du modèle avec convection	86
5.2	Séries temporelles de $\langle \rho u_z \rangle$	88
5.3	DNS dans l'espace de Fourier	90
5.4	Synchronisation des vortex	91
5.5	Approximation adiabatique	92
5.6	Évolution temporelle des ratios d'énergie	93
5.7	Ratio d'énergie pour une simulation « synchronisée »	94
5.8	Synthèse des DNS dans le plan (k_x, Ra)	95
5.9	Études paramétriques $(t_{\text{conv}}/\Pi, k_x, \text{Ra})$	97

5.10	Flux moyens	98
5.11	Transformées de Fourier du flux convectif	99
5.12	Évolution temporelle du flux convectif de la DNS	99
5.13	Évolution temporelle des flux convectifs des MLT	100
5.14	Validité des modèles de MLT	101
5.15	Coefficients α	101
5.16	Profils verticaux des flux	102
A.1	Schéma de principe de la théorie de la longueur de mélange.	112

Liste des tables

1.1	Propriétés des Céphéides	14
1.2	Nombre de Céphéides	15
1.3	Paramétrisations des modèles de MLT	33
1.4	Dégénérescence des paramètres α	34
2.1	Spectre du cas radiatif	48
4.1	Taux de croissance	69
5.1	Noms des simulations considérées	89
5.2	Comparaison des MLT de Stellingwerf et Kuhfuß	103



Liste des publications

Revue internationale à comité de lecture

- [5] **Gastine T.** & Dintrans B., *Direct Numerical Simulations of the convection-pulsation coupling*, 2009, en préparation.
- [4] **Gastine T.** & Dintrans B., *Direct Numerical Simulations of the κ -mechanism, II. Nonlinear saturation and the Hertzsprung progression*, 2008b, A&A, 490, 743
[arXiv :astro-ph/0804.0345](#)
- [3] Donati J.-F., Morin J., Petit P., Delfosse X., Forveille T., Albert L., Aurière M., Cabanac R., Dintrans B., Fares R., **Gastine T.**, Jardine M. M., Lignières F., Paletou F., Ramirez Velez J. C., Théado S., *Large-scale magnetic topologies of mid M dwarfs*, 2008, MNRAS, 390, 567, [arXiv :astro-ph/0808.1423](#)
- [2] **Gastine T.** & Dintrans B., *Direct Numerical Simulations of the κ -mechanism, I. Radial Modes in the purely radiative case*, 2008a, A&A, 484, 29
[arXiv :astro-ph/0711.1276](#)
- [1] Donati J.-F., Morin J., Petit P., Delfosse X., Forveille T., Aurière M., Cabanac R., Dintrans B., Fares R., **Gastine T.**, Jardine M. M., Lignières F., Paletou F., Ramirez Velez J. C., Théado S., *Large-scale magnetic topologies of early M dwarfs*, 2008, MNRAS, 390, 545, [arXiv :astro-ph/0809.0269](#)

Conférences internationales avec actes

- [3] Petit P., Dintrans B., Aurière M., Catala C., Donati J.-F., Fares R., **Gastine T.**, Lignières F., Morgenthaler A., Morin J., Paletou F., Ramirez J., Solanki S. K., Théado S., 2009, *Magnetic geometries of Sun-like stars : exploring the mass-rotation plane*, 2009, Proceeding de l'IAU, 259, 441
- [2] **Gastine T.** & Dintrans B., *Direct numerical simulations of the κ -mechanism*, 2008, Proceeding de la conférence annuelle de la SF2A, Eds. : Charbonnel C., Combes F. and Samadi R.
- [1] Petit P., Dintrans B., Aurière M., Catala C., Donati J.-F., Fares R., **Gastine T.**, Lignières F., Morin J., Paletou F., Ramirez J., Solanki S. K., Théado S., *Magnetic geometries of Sun-like stars : impact of rotation*, 2008, Proceeding de la conférence annuelle de la SF2A, Eds. : Charbonnel C., Combes F. and Samadi R.



Direct numerical simulations of the κ -mechanism

I. Radial modes in the purely radiative case

T. Gastine and B. Dintrans

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes, Université de Toulouse, CNRS, 14 avenue Edouard Belin, F-31400 Toulouse, France

September 1, 2009, *Revision* : 1.159

ABSTRACT

Context. We present a purely-radiative hydrodynamical model of the κ -mechanism that sustains radial oscillations in Cepheid variables.

Aims. We determine the physical conditions favourable for the κ -mechanism to occur inside a layer, with a configurable conductivity-hollow. We complete nonlinear direct numerical simulations (DNS) that initiate from these most favourable conditions.

Methods. We compare the results of a linear-stability analysis, applied to radial modes using a spectral solver, and a DNS, which is developed from a high-order finite difference code.

Results. We find that by changing the location and shape of the hollow, we can generate well-defined instability strips. For a given position in the layer, the amplitude and width of the hollow appear to be key parameters to vary to attain unstable modes driven by the κ -mechanism. The DNS, starting from the favourable conditions, confirm both the growth rates and the structures of linearly-unstable modes. Nonlinear saturation is produced by intricate couplings between excited fundamental mode and higher damped overtones.

Key words. Hydrodynamics - Instabilities - Waves - Stars: oscillations - Methods: numerical

1. Introduction

Since the first studies of Cepheid variables, it has been known that convection occurs inside their envelopes, which change their pulsation properties (e.g. the reviews of Gautschy & Saio 1996; Buchler 1997). The coldest Cepheids, which are located close to the red edge of the instability strip, have the most extended surface convective zones. For many years, however, models of the oscillations of Cepheids have used the so-called “frozen-in convection” approximation, which assumes that convective flux perturbations are negligible (Baker & Kippenhahn 1962). Such models reproduce the blue edge of the instability strip but not its red edge because, in this case, the strong existing couplings between convection and oscillations cannot be modelled accurately. This discrepancy is evident in high-quality observations that show a narrower instability strip than predicted theoretically, i.e. modes that are linearly-unstable in the models but located outside the observational strip (Yecko et al. 1998, hereafter YKB98).

The main theoretical difficulty is that convection plays a crucial role in pulsations, while we know that convection itself is roughly described by mixing-length theories (Vitense 1953; Böhm-Vitense 1958). However, several time-dependent convection models (TDC) have been developed (e.g. Unno 1967; Gough 1977; Stellingwerf 1982). Recent studies (YKB98; Bono et al. 1999) rely on Stellingwerf’s convection model (Stellingwerf 1982) or similar more modern approaches to compute the linear and nonlinear time evolution of the amplitudes of modes (Kuhfuß 1986; Gehmeyr & Winkler 1992; Wuchterl & Feuchtinger 1998). The major problem of TDC is the choice of

many free parameters introduced by the convection model¹. As these parameters cannot be theoretically well-determined, they must be constrained by direct fitting of the observational data to the models.

Another way to study the convection-pulsation interaction is to develop (nonlinear) direct numerical simulations (DNS) of the entire hydrodynamical problem. We aim to develop such simulations in 2-D and 3-D, in which a convective zone is coupled with a radiative one and unstable radial acoustic modes are self-consistently excited by the κ -mechanism. However, as DNS are highly time-consuming, it is necessary to use the appropriate initial conditions. In this paper, we attempt to determine the physical conditions that are favourable to excitation based on the κ -mechanism.

Eddington (1917), and then Zhevakin (1953) and Cox (1958) introduced a mechanism linked to opacity in ionisation regions, the κ -mechanism, where κ denotes opacity (see also the review of Zhevakin 1963). They showed that Cepheids’ radial oscillations are driven by a thermal heat engine, since radial pulsations must be maintained by a sustained physical process. The process they proposed was a Carnot-like thermodynamic cycle, which stores heat during compression phases and releases heat during decompression. This mechanism, now referred to as the Eddington’s valve, can occur only in regions of a star where the opacity varies such that the radiative flux is blocked during compression phases. Opacity tables such as OPAL show strong increases in ionisation regions of main (i.e. Hydrogen and Helium) or heavy elements that are commonly called “ionisation bumps” (e.g. Seaton & Badnell 2004). As a consequence, these ionisation zones are locally responsible for mode amplification. Apart

Send offprint requests to: thomas.gastine@ast.obs-mip.fr

¹ e.g. the seven coefficients $[\alpha_c, \alpha_t, \alpha_v, \alpha_\Lambda, \alpha_s, \alpha_d, \alpha_p]$ in YKB98 or the eight ones in Kolláth et al. (2002).

Direct numerical simulations of the κ -mechanism

II. Nonlinear saturation and the Hertzsprung progression

T. Gastine and B. Dintrans

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes, Université de Toulouse, CNRS, 14 avenue Edouard Belin, F-31400 Toulouse, France

September 1, 2009, *Revision* : 1.99

ABSTRACT

Context. We study the κ -mechanism that excites radial oscillations in Cepheid variables.

Aims. We address the mode couplings that manage the nonlinear saturation of the instability in direct numerical simulations (DNS).

Methods. We project the DNS fields onto an acoustic subspace built from the regular and adjoint eigenvectors that are solutions to the linear oscillation equations.

Results. We determine the time evolution of both the amplitude and kinetic energy of each mode that propagates in the DNS. More than 98% of the total kinetic energy is contained in two modes that correspond to the linearly-unstable fundamental mode and the linearly-stable second overtone. Because the eigenperiod ratio is close to 1/2, we discover that the nonlinear saturation is due to a 2:1 resonance between these two modes. An interesting application of this result concerns the reproduction of Hertzsprung's progression observed in Bump Cepheids.

Key words. Hydrodynamics - Instabilities - Waves - Stars: oscillations - (Stars:variables:) Cepheids - Methods: numerical

1. Introduction

In Gastine & Dintrans (2008) (hereafter Paper I), we modelled the κ -mechanism in classical Cepheids using a simplified approach, that is, the propagation of acoustic waves in a layer of gas where the opacity bump is represented by a hollow in radiative conductivity. To maintain the mode excitation, the two following conditions apply:

- A sufficient width and amplitude are required for the conductivity hollow.
- This hollow must be located in a precise zone called the “transition region”.

Our parametric approach enabled us to check the reality of these two conditions and to obtain the instability strips from a linear-stability analysis. By starting from the most favourable situations (i.e. the most unstable linear modes), we performed the corresponding 1-D and 2-D nonlinear Direct Numerical Simulations (hereafter DNS). These DNS confirmed with a noteworthy agreement both the growth rates and spatial structures of linearly-unstable modes. The nonlinear saturation was reached and a quantitative study of the involved mode couplings remained to be done.

This is the principle aim of this paper. To study the nonlinear interactions between modes, we adapt a powerful method used in, e.g., aeroacoustics (Salwen & Grosch 1981; Wang et al. 2006) or numerical astrophysics (Bogdan et al. 1993, hereafter BCM93). It is based on a projection of DNS fields onto a basis shaped from the regular and adjoint eigenvectors that are solutions to the linear oscillation equations. This method has already been used in a simplified version by one of us to study internal waves in DNS (Dintrans & Brandenburg 2004; Dintrans

et al. 2005). In the quoted investigation the eigenvalue problem was adiabatic, and therefore *Hermitian*, and the authors only accounted for projections onto regular eigenfunctions. This reduction is not applicable in our κ -mechanism simulations since the transition region requires low densities close to the surface and then high diffusivities (Paper I). Eigenmodes are highly non-adiabatic and imply non-Hermitian oscillation operators with non-orthogonal eigenfunctions. Solving the adjoint problem is therefore mandatory to determine both mode amplitudes and energy.

By using projections onto the two respective sets of eigenvectors, the regular and adjoint ones, the time evolution of each acoustic mode propagating in DNS is completed. The kinetic energy in each acoustic mode is available that highlights the energy transfer between modes. One of the main results of this work is that more than 98% of the total kinetic energy is contained in both the fundamental mode and the second overtone. Because this second overtone is linearly stable, we show that its large amplitude results from a 2:1 resonance with the fundamental mode. In our numerical experiments, this resonance is efficient because the ratio of the two involved periods, that is P_2/P_0 , is close to 1/2.

This nonlinear saturation based on a 2:1 resonance is an interesting result because this mechanism has been proposed to explain the secondary bump in light curves of some classical Cepheids named “Bump Cepheids”. The bump position is correlated with the oscillation period that leads to the well-known *Hertzsprung progression* (Hertzsprung 1926; Payne-Gaposchkin 1954). The bump first appears on the descending branch of the light curve of Population I Cepheids with periods of about 6-7 days and then travels up this curve to reach its maximum for 10-11 day Cepheids. For longer periods, it moves down in the ascending branch and disappears for periods longer than 20 days

Bibliographie

- AIKAWA, T. & WHITNEY, C. A. 1984 Stellar acoustics. II - Pulse resonance in giant star models. *ApJ* **282**, 527–532.
- AIKAWA, T. & WHITNEY, C. A. 1985 Stellar acoustics. III - Pulse propagation and bump features. *ApJ* **296**, 165–168.
- ALLEN, P. D. & SHANKS, T. 2004 The dispersion in the Cepheid period-luminosity relation and the consequences for the extragalactic distance scale. *MNRAS* **347**, 1011–1032.
- ARNOLDI, W. E. 1951 The Principle of Minimized Iterations in the Solution of the Matrix Eigenvalue Problem. *QApMa* **9**, 17–29.
- BAKER, N. & KIPPENHAHN, R. 1965 The Pulsations of Models of Delta Cephei Stars. II. *ApJ* **142**, 868–889.
- BAKER, N. H. 1987 Time dependent convection in stars - A review of the theories. In *Physical Processes in Comets, Stars and Active Galaxies* (ed. W. Hillebrandt, E. Meyer-Hofmeister & H.-C. Thomas), pp. 105–124.
- BARASH, D., SCHLICK, T., ISRAELI, M. & KIMMEL, R. 2003 Multiplicative Operator Splitting in Nonlinear Diffusion : from Spatial Splitting to Multiple Timesteps. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* **19** (1), 33–48.
- BOGDAN, T. J., CATTANEO, F. & MALAGOLI, A. 1993 On the generation of sound by turbulent convection. I - A numerical experiment. *ApJ* **407**, 316–329.
- BOHLIUS, S., PLEINER, H. & BRAND, H. R. 2007 Solution of the adjoint problem for instabilities with a deformable surface : Rosenweig and Marangoni instability. *Phys. of Fluids* **19** (094103), 1–12.
- BÖHM-VITENSE, E. 1958 Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. Mit 5 Textabbildungen. *Zeitschrift für Astrophysik* **46**, 108–143.
- BONO, G., CASTELLANI, V. & MARCONI, M. 2002 Theoretical Models for Bump Cepheids. *ApJ* **565**, L83–L86. [arXiv:astro-ph/0201106](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0201106).
- BONO, G., MARCONI, M. & STELLINGWERF, R. F. 1999 Classical Cepheid Pulsation Models. I. Physical Structure. *ApJS* **122**, 167–205.
- BONO, G., MARCONI, M. & STELLINGWERF, R. F. 2000 Classical Cepheid pulsation models — VI. The Hertzsprung progression. *A&A* **360**, 245–262. [arXiv:astro-ph/0006229](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0006229).
- BONO, G. & STELLINGWERF, R. F. 1994 Pulsation and stability of RR Lyrae stars. 1 : Instability strip. *ApJS* **93**, 233–269.

- BUCHLER, J. R. 1997 Classical Cepheids - a Review. In *Variables Stars and the Astrophysical Returns of the Microlensing Surveys* (ed. R. Ferlet, J.-P. Maillard & B. Raban), pp. 181–191. [arXiv:astro-ph/9707121](#).
- BUCHLER, J. R. 2000 Nonlinear Pulsations of Convective Stellar Models. In *IAU Colloq. 176 : The Impact of Large-Scale Surveys on Pulsating Star Research* (ed. L. Szabados & D. Kurtz), *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, vol. 203, pp. 343–355. [arXiv:astro-ph/9909144](#).
- BUCHLER, J. R. 2009 The State of Cepheid Pulsation Theory. In *AIP Conference Proceedings* (ed. J. A. Guzik & P. A. Bradley), *American Institute of Physics Conference Series*, vol. 1170, pp. 51–58. [arXiv:0907.1766](#).
- BUCHLER, J. R. & GOUPIL, M.-J. 1984 Amplitude equations for nonadiabatic nonlinear stellar pulsators. I - The formalism. *ApJ* **279**, 394–400.
- BUCHLER, J. R., MOSKALIK, P. & KOVACS, G. 1990 A survey of Bump Cepheid model pulsations. *ApJ* **351**, 617–631.
- BUCHLER, J. R., YECKO, P. A., KOLLÁTH, Z. & GOUPIL, M.-J. 1999 Turbulent Convection in Pulsating Stars. In *Stellar Structure : Theory and Test of Convective Energy Transport* (ed. A. Gimenez, E. F. Guinan & B. Montesinos), *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, vol. 173, pp. 141–155. [arXiv:astro-ph/9901188](#).
- CARSON, T. R. 1976 Stellar opacity. *ARA&A* **14**, 95–117.
- CHRISTENSEN-DALSGAARD, J. 2003 *Lecture Notes on Stellar Oscillations*. Aarhus University : Physical and Astronomical Institute of Aarhus University.
- CHRISTY, R. F. 1968 The Theory of Cepheid Variability. *QJRAS* **9**, 13.
- CORDIER, D., GOUPIL, M. J. & LEBRETON, Y. 2003 The faint Cepheids of the Small Magellanic Cloud : An evolutionary selection effect? *A&A* **409**, 491–501. [arXiv:astro-ph/0305072](#).
- COX, J. P. 1967 The Linear Theory : Initiation of Pulsational Instability in Stars. In *Aerodynamic Phenomena in Stellar Atmospheres* (ed. R. N. Thomas), *IAU Symposium*, vol. 28, pp. 3–104.
- COX, J. P. 1980 *Theory of stellar pulsation*. Princeton : Princeton University Press.
- COX, J. P. & WHITNEY, C. 1958 Stellar Pulsation.IV. a Semitheoretical Period-Luminosity Relation for Classical Cepheids. *ApJ* **127**, 561–572.
- CRANK, J. & NICOLSON, P. 1943 A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **43**, 50–67.
- DENDY, J. E. 1977 Alternating Direction Methods for Nonlinear Time-Dependent Problems. *SJNAAM* **14** (2), 313–326.
- DINTRANS, B. & BRANDENBURG, A. 2004 Identification of gravity waves in hydrodynamical simulations. *A&A* **421**, 775–782. [arXiv:astro-ph/0311094](#).
- DINTRANS, B. & RIEUTORD, M. 2001 A comparison of the anelastic and subseismic approximations for low-frequency gravity modes in stars. *MNRAS* **324**, 635–642. [arXiv:astro-ph/0011273](#).

- DUPRET, M.-A., GRIGAHCÈNE, A., GARRIDO, R., GABRIEL, M. & SCUFLAIRE, R. 2005 Convection-pulsation coupling. II. Excitation and stabilization mechanisms in δ Sct and γ Dor stars. *A&A* **435**, 927–939.
- DUPRET, M.-A., GRIGAHCÈNE, A., GABRIEL, M. & GARRIDO, R. 2006 Convection-pulsation interaction : theories and applications. *Communications in Asteroseismology* **147**, 61–64.
- D'YAKONOV, E. G. 1964 Difference schemes of second-order accuracy with a splitting operator for parabolic equations without mixed derivatives. *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* **4**, 935–941.
- DZIEMBOWSKI, W. A. 1971 Nonradial Oscillations of Evolved Stars. I. Quasiadiabatic Approximation. *Acta Astronomica* **21**, 289–306.
- EDDINGTON, A. S. 1917 The pulsation theory of Cepheid variables. *The Observatory* **40**, 290–293.
- EPSTEIN, I. 1950 Pulsation Properties of Giant-Star Models. *ApJ* **112**, 6–21.
- FADEYEV, Y. A. & MUTHSAM, H. 1992 Fourier analysis of the hydrodynamic models of classical Cepheids. *A&A* **260**, 195–204.
- FEUCHTINGER, M. U. 1999a A nonlinear convective model for radial stellar pulsations. I. The physical description. *A&A* **136**, 217–226.
- FEUCHTINGER, M. U. 1999b A nonlinear convective model of pulsating stars. II. RR Lyrae stars. *A&A* **351**, 103–118.
- FEUCHTINGER, M. U., BUCHLER, J. R. & KOLLÁTH, Z. 2000 Hydrodynamical Survey of First-Overtone Cepheids. *ApJ* **544**, 1056–1066. [arXiv:astro-ph/0005230](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0005230).
- FUKUSHIMA, T. 1997 Picard Iteration method, Chebyshev Polynomial Approximation, and Global Numerical Integration of Dynamical Motions. *AJ* **113**, 1909–1914.
- GASTINE, T. & DINTRANS, B. 2008a Direct numerical simulations of the κ -mechanism. I. Radial modes in the purely radiative case. *A&A* **484**, 29–42. [arXiv:0711.1276](https://arxiv.org/abs/0711.1276).
- GASTINE, T. & DINTRANS, B. 2008b Direct numerical simulations of the κ -mechanism. II. Nonlinear saturation and the Hertzsprung progression. *A&A* **490**, 743–752. [arXiv:0804.0345](https://arxiv.org/abs/0804.0345).
- GAUTSCHY, A. & SAIO, H. 1996 Stellar Pulsations Across the HR Diagram : Part 2. *ARA&A* **34**, 551–606.
- GEHMEYR, M. & WINKLER, K.-H. A. 1992a On a New One-Dimensional Time-Dependent Model for Turbulence and Convection - Part Two - an Elementary Comparison of the Old and the New Model. *A&A* **253**, 101–112.
- GEHMEYR, M. & WINKLER, K.-H. A. 1992b On a new, one-dimensional, time-dependent model for turbulence and convection. I - A basic discussion of the mathematical model. II - an elementary comparison of the old and the new model. *A&A* **253**, 92–112.
- GILLILAND, R. L., BONO, G., EDMONDS, P. D., CAPUTO, F., CASSISI, S., PETRO, L. D., SAHA, A. & SHARA, M. M. 1998 Oscillating Blue Stragglers in the Core of 47 Tucanae. *ApJ* **507**, 818–845.
- GOUGH, D. O. 1969 The Anelastic Approximation for Thermal Convection. *Journal of Atmospheric Sciences* **26**, 448–456.

- GOUGH, D. O. 1977 Mixing-length theory for pulsating stars. *ApJ* **214**, 196–213.
- GOUGH, D. O., MOORE, D. R., SPIEGEL, E. A. & WEISS, N. O. 1976 Convective Instability in a Compressible Atmosphere. II. *ApJ* **206**, 536–542.
- GRIGAHCÈNE, A., DUPRET, M.-A., GABRIEL, M., GARRIDO, R. & SCUFLAIRE, R. 2005 Convection-pulsation coupling. I. A mixing-length perturbative theory. *A&A* **434**, 1055–1062.
- HAIRER, E., NORSETT, S. P. & WANNER, G. 1993 *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag.
- HANSEN, C. J. & KAWALER, S. D. 1994 *Stellar Interiors. Physical Principles, Structure, and Evolution..* Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag.
- HARTMAN, J. D., BERSIER, D., STANEK, K. Z., BEAULIEU, J.-P., KALUZNY, J., MARQUETTE, J.-B., STETSON, P. B. & SCHWARZENBERG-CZERNY, A. 2006 Deep Canada-France-Hawaii Telescope photometric survey of the entire M33 galaxy - I. Catalogue of 36000 variable point sources. *MNRAS* **371**, 1405–1417. [arXiv:astro-ph/0603527](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0603527).
- HEINEMANN, T., NORDLUND, Å., SCHARMER, G. B. & SPRUIT, H. C. 2007 MHD Simulations of Penumbra Fine Structure. *ApJ* **669**, 1390–1394. [arXiv:astro-ph/0612648](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0612648).
- HERTZSPRUNG, E. 1926 On the relation between period and form of the light-curve of variable stars of the δ Cephei type. *Bull. Astron. Inst. Netherlands* **3**, 115–120.
- HURLBURT, N. E., TOOMRE, J. & MASSAGUER, J. M. 1984 Two-dimensional compressible convection extending over multiple scale heights. *ApJ* **282**, 557–573.
- KING, D. S. & COX, J. P. 1968 Pulsating Stars. *PASP* **80**, 365–405.
- KLAPP, J., GOUPIL, M. J. & BUCHLER, J. R. 1985 Amplitude equations for nonadiabatic nonlinear stellar pulsators. II - Application to realistic resonant Cepheid models. *ApJ* **296**, 514–528.
- KOLLÁTH, Z., BUCHLER, J. R., SZABÓ, R. & CSUBRY, Z. 2002 Nonlinear beat Cepheid and RR Lyrae models. *A&A* **385**, 932–939. [arXiv:astro-ph/0110076](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0110076).
- KOSMIDOU, E. P. & TSIBOUKIS, T. D. 2003 An Unconditionally Stable ADI-FDTD Algorithm for Nonlinear Materials. *Optical Quantum Electron.* **32**, 931–946.
- KOVACS, G. & BUCHLER, J. R. 1989 The Cepheid bump progression and amplitude equations. *ApJ* **346**, 898–905.
- KUHFUSS, R. 1986 A model for time-dependent turbulent convection. *A&A* **160**, 116–120.
- LEAVITT, H. S. & PICKERING, E. C. 1912 Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud. *Harvard College Observatory Circular* **173**, 1–3.
- LEDoux, P. & WALRAVEN, T. 1958 Variable Stars. *Handbuch der Physik* **51**, 353–604.
- LESIEUR, M. 1997 *Turbulence in Fluids*. Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers.
- LÖWDIN, P.-O. 1983 On the stability problem of a pair of adjoint operators. *Journal of Mathematical Physics* **24**, 70–87.
- LYNDEN-BELL, D. & OSTRICKER, J. P. 1967 On the stability of differentially rotating bodies. *MNRAS* **136**, 293–310.

- MADORE, B. F. 1982 The period-luminosity relation. IV - Intrinsic relations and redde-
nings for the Large Magellanic Cloud Cepheids. *ApJ* **253**, 575–579.
- MALAGOLI, A., DUBEY, A., CATTANEO, F. & LEVINE, D. 1995 *A Portable and Efficient
Parallel Code for Astrophysical Fluid Dynamics*.
- MASALKAR, P. J. 1994 Calculation of concentration profile in ion-exchange waveguides
by finite differences ADI method. *Optik* **95** **4**, 168–172.
- MIHALAS, D. 2003 Cepheid Atmospheres. In *Stellar Atmosphere Modeling* (ed. I. Hubeny,
D. Mihalas & K. Werner), *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, vol.
288, pp. 471–490.
- MIHALAS, D. & WEIBEL MIHALAS, B. 1984 *Foundations of radiation hydrodynamics*.
New York : Oxford University Press.
- MOLER, C. B. & STEWART, G. W. 1973 An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue
Problems. *SJNA*. **10** (2), 241–256.
- MULET-MARQUIS, C., GLATZEL, W., BARAFFE, I. & WINISDOERFFER, C. 2007 Non-
radial oscillations in classical Cepheids : the problem revisited. *A&A* **465**, 937–942.
[arXiv:astro-ph/0701371](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0701371).
- PAYNE-GAPOSCHKIN, C. 1954 The Cepheid variables and RR Lyrae stars. *Annals of
Harvard College Observatory* **113**, 151–186.
- PEACEMAN, D. W. & RACHFORD, H. H. 1955 The Numerical Solution of Parabolic and
Elliptic Differential Equations. *JSIAM*. **3** (1), 28–41.
- PRANDTL, L. 1952 *Essentials of Fluid Dynamics*. London : Blackie.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. & FLANNERY, B. P. 1992 *Nu-
merical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*. Cambridge : University
Press, 2nd ed.
- SAAD, Y. 1992 *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. New York : Halsted
Press.
- SAARIKOSKI, H., SALMIO, R. P., SAARINEN, J., EIROLA, T. & TERVONEN, A. 1997 Fast
numerical solution of nonlinear diffusion equation for the simulation of ion-exchanged
micro-optics components in glass. *Optics Communications* **134** (1-6), 362–370.
- SALWEN, H. & GROSCH, H. E. 1981 The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld
equation. Part2. Eigenfunction expansions. *Journal of Fluid Mechanics* **104**, 445–465.
- SEATON, M. J. & BADNELL, N. R. 2004 A comparison of Rosseland-mean opacities from
OP and OPAL. *MNRAS* **354**, 457–465. [arXiv:astro-ph/0404437](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0404437).
- SIMON, N. R. & LEE, A. S. 1981 The structural properties of Cepheid light curves. *ApJ*
248, 291–297.
- SIMON, N. R. & SCHMIDT, E. G. 1976 Evidence Favoring Nonevolutionary Cepheid
Masses. *ApJ* **205**, 162–164.
- SOSZYNSKI, I., POLESKI, R., UDALSKI, A., SZYMANSKI, M. K., KUBIAK, M., PIE-
TRZYNSKI, G., WYRZYKOWSKI, L., SZEWCZYK, O. & ULACZYK, K. 2008 The Op-
tical Gravitational Lensing Experiment. The OGLE-III Catalog of Variable Stars. I.
Classical Cepheids in the Large Magellanic Cloud. *Acta Astronomica* **58**, 163–185.
[arXiv:0808.2210](https://arxiv.org/abs/0808.2210).

- SPIEGEL, E. A. 1963 A Generalization of the Mixing-Length Theory of Turbulent Convection. *ApJ* **138**, 216–225.
- STELLINGWERF, R. F. 1982*a* Convection in Pulsating Stars - Part Two - Rr-Lyrae Convection and Stability. *ApJ* **262**, 339–343.
- STELLINGWERF, R. F. 1982*b* Convection in pulsating stars. I - Nonlinear hydrodynamics. II - RR Lyrae convection and stability. *ApJ* **262**, 330–338.
- TSVETKOV, T. G. 1990 Classical Cepheids with and without bumps in the light curves. *Ap&SS* **173**, 31–46.
- UDALSKI, A., SOSZYNSKI, I., SZYMANSKI, M., KUBIAK, M., PIETRZYNSKI, G., WOZNIAK, P. & ZEBRUN, K. 1999 The Optical Gravitational Lensing Experiment. Cepheids in the Magellanic Clouds. V. Catalog of Cepheids from the Small Magellanic Cloud. *Acta Astronomica* **49**, 437–520. [arXiv:astro-ph/9912096](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9912096).
- UNNO, W. 1967 Stellar Radial Pulsation Coupled with the Convection. *PASJ* **19**, 140–153.
- UNNO, W., OSAKI, Y., ANDO, H., SAIO, H. & SHIBAHASHI, H. 1989 *Nonradial oscillations of stars*. Tokyo : University of Tokyo Press, 2nd ed.
- VALDETTARO, L., RIEUTORD, M., BRACONNIER, T. & FRAYSSE, V. 2007 Convergence and round-off errors in a two-dimensional eigenvalue problem using spectral methods and Arnoldi-Chebyshev algorithm. *JCoAM* **205** (1), 382–393. [arXiv:physics/0604219](https://arxiv.org/abs/physics/0604219).
- VITENSE, E. 1953 Die Wasserstoffkonvektionszone der Sonne. Mit 11 Textabbildungen. *Zeitschrift für Astrophysik* **32**, 135–164.
- WANG, M., FREUND, J. B. & LELE, S. K. 2006 Computational prediction of flow-generated sound. *Annual review of Fluid Mechanics* **38**, 483–512.
- WHITNEY, C. A. 1956 The velocity humps of classical Cepheids. *AJ* **61**, 192–193.
- WHITNEY, C. A. 1983 Stellar acoustics. I - Adiabatic pulse propagation and modal resonance in polytropic models of bump Cepheids. *ApJ* **274**, 830–839.
- WITELSKI, T. P. & BOWEN, M. 2003 ADI schemes for higher-order nonlinear diffusion equations. *Appl. Numer. Math.* **45** (2-3), 331–351.
- WUCHTERL, G. & FEUCHTINGER, M. U. 1998 A simple convection model for selfgravitating fluid dynamics. Time-dependent convective energy transfer in protostars and nonlinear stellar pulsations. *A&A* **340**, 419–430.
- XIONG, D. R., CHENG, Q. L. & DENG, L. 1997 Nonlocal Time-dependent Convection Theory. *ApJS* **108**, 529–544.
- YECKO, P. A., KOLLÁTH, Z. & BUCHLER, J. R. 1998 Turbulent convective cepheid models : linear properties. *A&A* **336**, 553–564. [arXiv:astro-ph/9804124](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9804124).
- ZHEVAKIN, S. A. 1963 Physical Basis of the Pulsation Theory of Variable Stars. *ARA&A* **1**, 367–400.

Index

A

acoustique
 aéro-acoustique 71
 mode 20, 23, 41, 46, 48, 50, 52, 68, 70, 74, 77, 88, 89, 93, 96, 98
 ADI 57, 59, 61
 anélastique (approximation) ... 27, 31, 115
 Analyse de stabilité linéaire . 41, 67, 69, 76
 Arnoldi-Tchebychev 46
 auto-adjoint 71, 119

B

bande d'instabilité 16, 18, 25, 48, 68, 80, 94
 bande spectrale 14, 16
 biorthogonalité 71, 74, 121
 blue-loop 16
 Boussinesq (approximation) 112, 113

C

Céphéide
 δ -Cephei 14
 beat-Céphéide 14, 37
 bump-Céphéide 14, 37, 79
 CFL (condition) 55
 choc 87
 conductivité radiative 22, 42–43, 47, 50, 56, 59, 63, 86, 99
 convection
 oscillante 39, 88
 -pulsations .. 13, 26, 39, 41, 87, 98, 102
 retournement 26, 96
 vitesse convective 87
 Crank-Nicolson (schéma de) 57, 59

D

D'Yakonov (schéma de) 58
 degré ℓ 70, 89
 diagramme de phase 76
 diagramme HR 16

diffusion (approximation) 21, 30, 114
 Dirichlet (condition de) 59, 61, 64

E

échelle de pression H_p 31, 112, 114
 ϵ -mécanisme 18
 études paramétriques 48–52
 Eulérienne (perturbation) 21, 45

F

flux cinétique 29, 33, 34, 98, 103
 flux convectif . 30–31, 98–100, 111, 112, 114
 flux radiatif 22, 45, 80, 83, 87, 114, 115
 Fourier (transformées) 69, 89, 92
 fréquence propre ω 75, 88, 98

G

γ -mécanisme 22
 Gauss-Lobatto (grille de) 46, 47

H

Helium (HeII) 25, 80
 hermitien (opérateur) 71, 92, 119
 Hertzprung (progression) 79–82

I

intégrale de travail 20, 22, 52–53
 ionisation (zone) . 18, 22, 25, 52, 53, 68, 80, 86

J

Jacobien 60–61

K

modèle $k - \epsilon$ 29
 κ -mécanisme .. 22–25, 46, 48, 68, 77, 87, 96

L

Lagrangienne (perturbation) 21

Longueur de mélange

Böhm-Vitense 34, 111–114
 dépendante du temps ... 13, 26, 28, 38,
 87, 100–103, 114–118

Λ 28, 30, 34, 111, 112, 114

LSB 46, 76, 98

M

mécanisme d'écho 80

Mach (nombre de) 27, 87

N

non-adiabatique 18, 23, 24, 47, 52

non-linéaire

couplages 71, 76–78

saturation 55, 56, 67, 78, 80, 82, 89, 94

simulation 37, 55

numérique

contraintes 39, 41, 86–87

DNS 39, 41, 68–71, 88–91

méthodes 46, 55–65

O

OGLE 14–16, 37

onde de Christy 80

onde progressive 80

opacité

Kramers (lois) 23

sauts 18, 22, 25, 41, 50

tables 41

ordre radial n 18, 48, 75, 77

P

Période-Luminosité (relation) 16

Parseval (égalité de) 92

Peaceman-Rachford (schéma de) 58

Pencil Code 55, 63, 87

polytrophe 63, 80

Q

quasi-adiabatique (approximation) . 20, 22,
 23, 71, 91

QZ (algorithme) 46

R

résonance 2 : 1 14, 78–80

Rayleigh (nombre de) 95, 96

Rosenbrock (méthode de) 60

S

Schwarzschild (critère) 43, 47, 86

Méthodes spectrales

code 46, 48

convergence 48

précision 48

T

taux de croissance τ 20, 21, 45, 48, 55,
 68–69, 76

Tchebychev (polynômes) 46–48

V

valeur propre λ . 46, 48, 70, 73, 76, 89, 121

valve d'Eddington 18

viscosité de chocs 87

vitesse du son 23, 87, 112

von Neumann (condition de) 59, 61, 64

vorticité 91, 96

W

Wesenheit (magnitude) 16

Z

zone de transition 23–24, 50, 52, 71

Table des matières

Sommaire	5
Liste des notations utilisées	7
Introduction	9
1 Contexte astrophysique	13
1.1 Les étoiles Céphéides	14
1.1.1 Structure	14
1.1.2 Relation Période-Luminosité	15
1.1.3 Bande d'instabilité	16
1.2 Le κ -mécanisme	18
1.2.1 Thermodynamique des oscillations	18
1.2.2 Région de transition	23
1.3 Bande d'instabilité des Céphéides	24
1.3.1 Au delà du bord bleu	24
1.3.2 Dans la bande d'instabilité	24
1.3.3 Le bord rouge...	25
1.3.4 ...et ses difficultés de modélisation	25
1.3.5 Vers une solution ?	26
1.4 Théories de la longueur de mélange dépendante du temps	26
1.4.1 Construction du système d'équations	27
1.4.2 Modélisation du tenseur de Reynolds	28
1.4.3 Équations finales	29
1.4.4 Approximation de diffusion et viscosité turbulente	29
1.4.5 Estimation des paramètres α	34
1.4.6 Conclusion et résultats	36
1.4.7 Améliorations possibles	38
1.5 Conclusion : vers des simulations numériques directes	38
2 Analyse de stabilité linéaire	41
2.1 Le modèle	42
2.1.1 Le profil de conductivité radiative	42
2.1.2 Le modèle d'équilibre	42
2.1.3 Équations générales pour les oscillations	45
2.1.4 Conditions aux limites	46
2.1.5 Méthodes numériques	46
2.2 Résultats	46
2.2.1 Construction d'un modèle	46
2.2.2 Calcul des champs d'équilibre	47
2.2.3 Vecteurs propres	48
2.2.4 Études paramétriques	48
2.2.5 Intégrale de travail	52

3	Méthode numérique	55
3.1	La nécessité d'un solveur implicite	56
3.2	Cas avec conductivité radiative constante	57
3.2.1	Schéma de Crank-Nicolson	57
3.2.2	Schéma aux directions alternées (ADI)	57
3.2.3	Conditions aux limites	58
3.3	Cas avec conductivité radiative variable	59
3.3.1	Schéma aux directions alternées	59
3.3.2	Traitement de la non-linéarité	60
3.3.3	Conditions aux limites	61
3.4	Inclusion dans le Pencil Code	62
3.4.1	Cas avec conductivité radiative constante	62
3.4.2	Cas avec conductivité radiative variable	62
3.5	Résultats	63
3.5.1	Séries temporelles	63
3.5.2	Flux	64
4	DNS et saturation non-linéaire	67
4.1	Simulations numériques directes	68
4.1.1	Accord temporel : taux de croissance	68
4.1.2	Accord spatial : profils verticaux	69
4.2	Le problème adjoint	71
4.2.1	Problématique	71
4.2.2	Choix des variables physiques	71
4.2.3	Équations aux oscillations	71
4.2.4	Conditions aux limites	73
4.3	Projection sur les modes propres adjoints	75
4.3.1	Calcul des coefficients $c_n(t)$	75
4.3.2	Évolution temporelle de l'amplitude des modes	76
4.3.3	Diagrammes de phases	76
4.3.4	Contenu énergétique des modes	77
4.4	Progression d'Hertzsprung	79
4.4.1	Les <i>bump</i> -Céphéides	79
4.4.2	Le mécanisme de résonance dans notre modèle	80
5	Couplage convection-pulsations	85
5.1	Difficultés numériques	86
5.1.1	Modélisation	86
5.1.2	Stabilité numérique et chocs ?	87
5.2	Simulations numériques	88
5.2.1	Cadre de travail	88
5.2.2	Séries temporelles	88
5.2.3	Domaine spectral	89
5.2.4	Phénomène de synchronisation	91
5.3	Contenus énergétiques	91
5.3.1	Présentation de la méthode	91
5.3.2	Résultats	93
5.3.3	Phénomène de synchronisation	94
5.3.4	Bilan	94
5.4	Études paramétriques	95
5.4.1	Influence du nombre de Rayleigh	95
5.4.2	Synchronisation et temps de retournement	96

5.5	Évolution des flux et MLT dépendante du temps	98
5.5.1	Flux dans les DNS	98
5.5.2	DNS et longueur de mélange dépendante du temps	100
	Conclusions et perspectives	105
A	Longueur de mélange dépendante du temps	111
A.1	Théorie de la longueur de mélange de Böhm-Vitense	111
A.1.1	Hypothèses de travail	111
A.1.2	Mise en équations de la MLT	112
A.2	Théories de la longueur de mélange non locales	114
A.2.1	Présentation du problème	114
A.2.2	Mise en équation	115
B	Calcul de la matrice adjointe	119
B.1	Définition	119
B.2	Propriétés	119
B.2.1	Cas auto-adjoint	119
B.2.2	Cas où $H = a$	119
B.2.3	Cas où $H = D$	120
B.2.4	Cas où $H = aD$	120
B.2.5	Cas où $H = D^2$	120
B.3	La relation de biorthogonalité	121
B.4	Détails du calcul des termes de la matrice adjointe	121
	Liste des figures	129
	Liste des tables	130
	Liste des publications	131
	Bibliographie	135
	Index	141
	Table des matières	143



Study of the convection-pulsation coupling and application to Cepheid variable stars

Thomas GASTINE

Thesis supervisor : Boris DINTRANS

Abstract

Cepheid variables are pulsating stars that oscillate on radial acoustic modes. Their oscillations are sustained by a mechanism linked with opacity in ionisation regions, the κ -mechanism, where κ denotes the opacity. For now, the influence of the convective motions on this instability is not well known theoretically. The purpose of this thesis is to study this convection-pulsation coupling that occurs in cold Cepheids.

We have performed a linear stability analysis to get the most unstable models excited by the κ -mechanism. By starting from these favourable setups, we have computed direct numerical simulations. The nonlinear saturation was then addressed in presence of a convective zone.

Keywords : Hydrodynamics - Instabilities - Stars : oscillations - Convection - Methods : numerical

Étude de l'interaction convection-pulsations et application aux Céphéides

Thomas GASTINE

Directeur de thèse : Boris DINTRANS

Thèse (discipline : **Astrophysique**) soutenue le **18 novembre 2009** à **Toulouse**

Résumé

Le contexte général de ce travail de thèse est l'étude des étoiles géantes variables de type Céphéides, qui subissent des oscillations acoustiques purement radiales. Ces oscillations sont excitées par un mécanisme lié aux propriétés d'absorption du rayonnement par la matière, le κ -mécanisme. Mais l'influence de la convection sur cette instabilité est actuellement mal maîtrisée d'un point de vue théorique. Le but de cette thèse est d'étudier ce couplage convection-pulsations à l'œuvre dans les Céphéides froides.

Une analyse de stabilité linéaire nous a permis d'extraire les modèles les plus instables par κ -mécanisme. Ils ont ensuite servi de point de départ à une série de simulations numériques directes où la saturation non-linéaire de l'instabilité a été étudiée en présence de convection.

Mots-clés : Hydrodynamique - Instabilités - Oscillations stellaires - Convection - Méthodes numériques

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes (UMR5572)
Observatoire Midi-Pyrénées
14, avenue Edouard Belin
31400 Toulouse
FRANCE